ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 2 ::
August 1922

:: Heft 4 ::
Seite 233 bis 324

Zur Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Leipzig 1922

I N H A L T:

HAUPTAUFSÄTZE:

SCHULER, Kreiselkompaß / SCHILLING, Malerische Perspektive des Leone Battista Alberti / TREFFTZ, Torsionsspannungen / WEBER, Spannungsverteilung / NOETHER, Problem der Stromleitung / COURANT, Theorie der kleinen Schwingungen / GUMBEL, Strahlungsgesetz

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE:

HENCKY, Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie / WEBER, Torsionsproblem

KURZE AUSZÜGE

Elastizität und Festigkeit

KLEINE MITTEILUNGEN

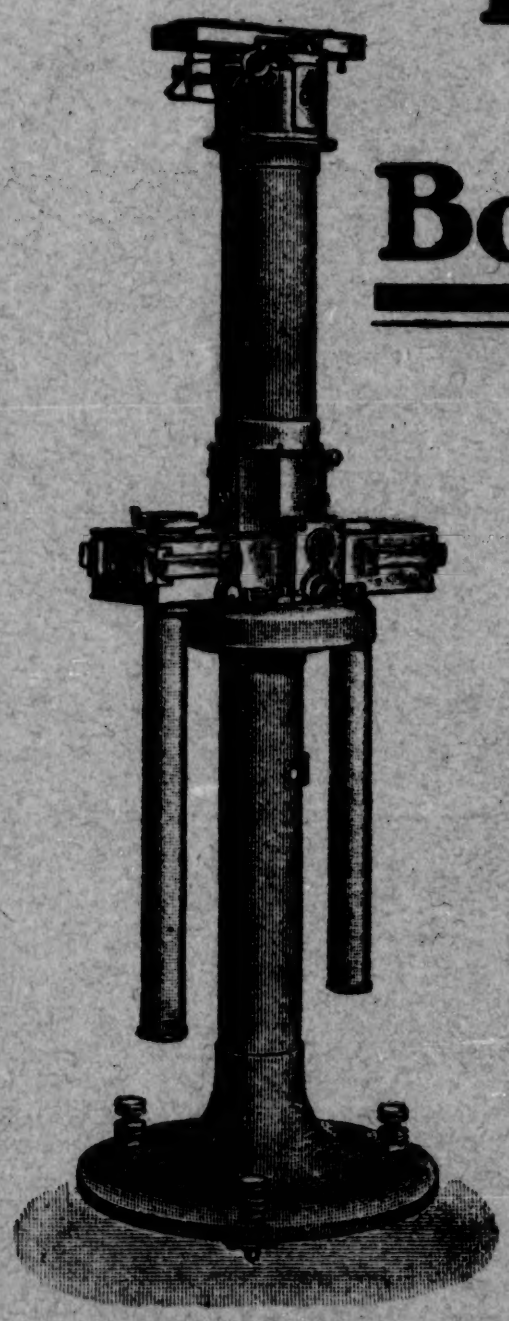
BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN

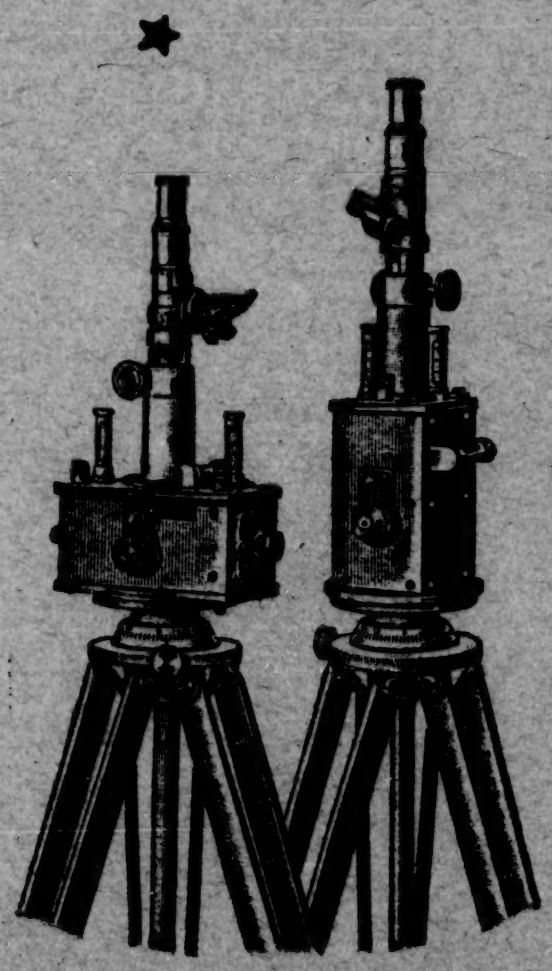
ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

Instrumente zur Ermittelung von Bodenschätzen



D. R. P.



ASKANIA-WERKE AKTIENGESELLSCHAFT

BAMBERGWERK

BERLIN-FRIEDENAU * KAISER-ALLEE 87-88

DESSAU / WIEN / ROTTERDAM

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 2 **Ende August 1922** **Heft 4**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. M. Schuler: Der Kreiselkompaß unter Einfluß der Schiffschwingungen	233
Fr. Schilling: Ueber eine Aufgabe der malerischen Perspektive des Leone Battista Alberti	250
E. Trefftz: Ueber die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens	263
C. Weber: Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern	267
F. Noether: Ueber ein Problem der Stromleitung	274
R. Courant: Zur Theorie der kleinen Schwingungen	278
E. J. Gumbel: Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zum Strahlungsgesetz	286
Zusammenfassende Berichte. H. Hencky: Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie	292
C. Weber: Bisherige Lösungen des Torsionsproblems	299
Kurze Auszüge. Elastizität und Festigkeit	302
Kleine Mitteilungen. Aus dem Inst. f. angew. Mathem. a. d. Univers. Berlin: v. Mises: Die Bewegung des Dollarkurses seit 1918 — Friesecke: Zeichnerische Ermittlung von Fourier-Koeffizienten — Bergmann: Das Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine	306
Buchbesprechungen. Eichelberg: Die thermischen Eigenschaften des Wasserdampfes — Meth: Theorie der Planetenbewegung — Timerding: Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung — Riebesell: Steuer-Mathematik — Zimm: Ueber die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl — Charlier: Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik	317
Nachrichten	320
Zuschrift an den Herausgeber	323

HAUPTAUFSÄTZE

Der Kreiselkompaß unter Einfluß der Schiffschwingungen.

Von **M. SCHULER** in Kiel.

Schon bei dem Magnetkompaß war es ein schwieriges Problem, die Einwirkungen der Rollbewegung des Schiffes auf den Kompaß möglichst zu vermindern. In früherer Zeit, als Kompasse mit nur einer einzigen Nadel verwendet wurden, ergaben sich große Fehlweisungen des Magnetkompasses bei Schlingerbewegungen des Schiffes. Ein bedeutender Fortschritt wurde dadurch erzielt, daß man statt einer Magnetnadel zwei verwendete und diese so anordnete, daß das Trägheits-Ellipsoid des Kompaß-Systems zu einem Rotations-Ellipsoid wurde; man machte das Trägheitsmoment in der Nord-Süd-Ebene gleich dem Trägheitsmoment in der Ost-West-Ebene. Diese neue Rose, »die Normalrose der britischen Admiralität« wurde in den Vierziger-Jahren des vorigen Jahrhunderts auf allen englischen Kriegsschiffen eingeführt.

Daß bei ungleichen Trägheitsmomenten Fehler der Kompaßweisung entstehen müssen, ergibt sich aus dem Kreiselgesetze, nach dem frei rotierende Körper nur um die Achse ihres größten oder kleinsten Trägheitsmomentes stabil rotieren können[1]). In allen anderen Fällen bewegt sich der Körper gegenüber dem im Raume feststehenden Impulsvektor. Infolgedessen wird auch ein schwingender Körper sich gegenüber der Schwingungsebene verdrehen, wenn er nicht um eine Hauptträgheitsachse schwingt. Und eine Kompaßrose, die durch einen äußeren Anstoß in Schwingungen um eine beliebige horizontale Achse versetzt wurde, wird nur dann keine Drehungen um die vertikale Achse ausführen, wenn jene horizontale Achse immer größte (oder kleinste) Trägheitsachse ist, was nur bei einem Rotationsellipsoid eintritt. Dagegen muß eine Kompaßrose mit verschiedenen Trägheitsmomenten das Bestreben zeigen, eine Hauptträgheitsachse in die Ebene einzustellen, in der sie durch den Seegang in Schwingungen versetzt wurde.

Ein weiterer, bedeutender Fortschritt wurde durch die Konstruktion von W. Thomsons Trockenrose erzielt, der durch geschickte Anordnung der Magnete die Schwingungsdauer der Rose um die Vertikalachse bis auf 38 Sekunden erhöhte, während

[1]) Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation d'un corps, Paris 1834. Klein u. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, Bd. I, S 130.

die alten Rosen nur 18 Sekunden besaßen. Dadurch wird bewirkt, daß die Kompaßrose bei schlingerndem Schiffe bedeutend ruhiger liegt, da ihre Eigenschwingungsdauer unter allen Umständen größer ist als die langsamsten Schlingerbewegungen des Schiffes [1]).

Bei der Konstruktion der Kreiselkompasse machte man sich die Erfahrungen am Magnetkompaß zunutze und glich die Trägheitsmomente in der Nord-Süd- und in der Ost-West-Ebene sorgfältig aus. Die Eigenschwingungszeit der Kompaßrose um den Meridian betrug ungefähr 80 Minuten, so daß die Forderungen von W. Thomson für den Magnetkompaß in idealer Weise beim Kreiselkompaß erfüllt waren. Trotzdem zeigten die Kreiselkompasse bei schwerem Seegang unter bestimmten Verhältnissen Fehler, die nicht auf Zufälligkeiten zurückgeführt werden konnten; denn auf allen mit dem Kreiselkompaß ausgerüsteten Schiffen von gleicher Bauart ergab sich bei gleichem Kurse und gleichem Seegang derselbe Fehler, sowohl der Größe wie der Richtung nach. Daraufhin angestellte Untersuchungen im Laboratorium bestätigten diese Erfabrungen und zeigten auch, daß durch eine Aenderung der Trägheitsmomente des Kompasses keine nennenswerte Aenderung des Fehlers hervorgerufen wurde. Es mußte also noch eine weitere, auf den Kreiselgesetzen beruhende Fehlerursache vorhanden sein.

Die einzige an dem Kompaßsystem angreifende eingeprägte Kraft ist die Schwerkraft, die den Kreisel in der horizontalen Lage fesselt und ihn bei Auslenkungen wieder in diese zurückzuführen sucht. Die Wirkung der Schwere schwankt aber an Bord eines schlingernden Schiffes infolge der auftretenden Beschleunigungsdrücke, sowohl der Größe wie der Richtung nach. Nur im augenblicklichen Drehpunkt des Schiffes ist dies nicht der Fall. Es wird aber nie möglich sein, den Kompaß genau in diesem Punkt aufzustellen, zumal dieser nach Ladung des Schiffes, Art und Richtung des Seeganges wechselt. Somit schien es das Wahrscheinlichste, daß diese Schwankungen der Schwere die beobachteten Fehler des Kompasses verursachten. Es zeigen nun kurze Rechnungen, daß Schwankungen in der absoluten Größe der Schwere keinen nennenswerten Fehler verursachen können. Diese müssen also auf Schwankungen in der Richtung der Schwere, d. h. also auf die horizontalen Komponenten der Beschleunigung zurückgeführt werden. Solche Beschleunigungen entstehen bei schlingerndem Schiff, wenn der Kompaß über oder unter dem Drehpunkt des Schiffes aufgestellt ist. Aber auch durch das Hin- und Herwerfen des Schiffes im Seegang oder durch periodische Verringerung der Schiffsgeschwindigkeit beim Durchschneiden der Wellenberge entstehen horizontale Beschleunigungen. Schließlich sei noch an die Schiffsschwankungen erinnert, die durch Maschinenerschütterungen, nicht gut ausbalanzierte Propeller und ähnliches entstehen. Die hierdurch verursachten Beschleunigungen sind zwar sowohl der Schwingungszeit wie dem Ausschlag nach von ganz anderer Größenordnung, für die mathematische Behandlung macht dies aber keinen Unterschied.

Um die Fehler zu bestimmen und gleichzeitig Mittel und Wege zu finden sie zu beseitigen, sind vom Verfasser nachfolgende Berechnungen durchgeführt worden. Dabei sind verschiedene Konstruktionen von Anschütz und von Sperry zugrunde gelegt, der Rechnungsgang und die erhaltenen Ergebnisse gelten aber ganz allgemein, und es lassen sich auf gleiche Weise auch die Fehler anderer Kreiselkompaßkonstruktionen bestimmen.

Die wichtigsten Ergebnisse der Rechnung sind kurz folgende:

1. Die Größe des Fehlers bei einem bestimmten Störungsmoment hängt nicht von den Trägheitsmomenten ab, sondern von den Schwingungszeiten des Kompasses um seine horizontalen Hauptachsen bei laufendem Kreisel.

2. Die Fehler werden am größten bei interkardinalen Störungsmomenten und verschwinden bei kardinalen Störungsmomenten.

3. Durch richtige Anordnung mehrerer Kreisel lassen sich die Fehler fast völlig kompensieren.

Der folgenden Rechnung soll zuerst die Konstruktion des Anschützschen Einkreiselkompasses zugrunde gelegt werden, wie sie in dem Jahrbuch der schiffbautechnischen Gesellschaft 1909 beschrieben ist [2]). Die Konstruktion ist in Abb. 1 schematisch

---

[1]) W. Thomson, On the perturbations of the Kompass produced by the rolling of the ship, 1874.

[2]) Weitere Beschreibungen: E. Klein u. A. Sommerfeld, »Ueber die Theorie des Kreisels«, Heft 4, S. 845 u. f. »Beschreibung des Kreiselkompasses« von Anschütz & Co., 1910 im Selbstverlag der Firma. »Der Kreiselkompaß als neueste Entwicklungsstufe des Kompaßwesens«, Nauticus 1913, von Connemann. »Lehrbuch für den Unterricht in der Navigation an der Kaiserlichen Marine-Schule«, 5. Teil, IV, von H. Maurer.

dargestellt. Der Kompaß besteht aus einem Kreisel mit horizontaler Achse, die mittels eines in Quecksilber schwimmenden Ringes um jede Achse drehbar aufgehängt ist. Die Kreiselachse wird durch das Schwere-Moment $m\,g\,a$ in der Horizontalebene gefesselt. Dabei bedeutet $m\,g$ das Gewicht des Kompaß-Systems und a den Abstand von Aufhängepunkt zu Schwerpunkt. Bei laufendem Kreisel stellt sich die Kreiselachse in die Nord-Süd-Richtung ein und hat eine kleine Elevation gegen die Horizontale, die sich nach den Kreiselgesetzen errechnet zu:

$$\beta_0 = \frac{J}{m\,g\,a}\,u \sin \varphi.$$

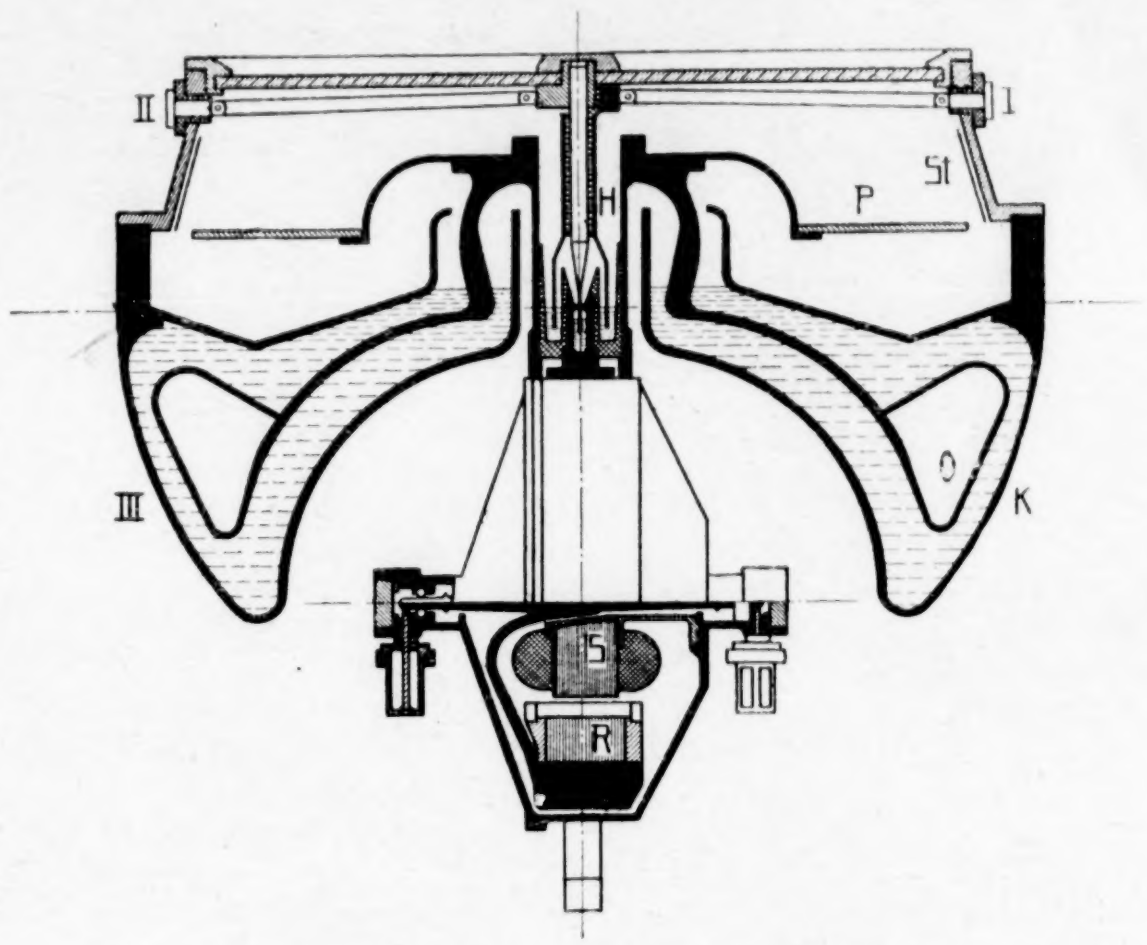


Abb. 1. Der Einkreiselkompaß von Anschütz & Co.

R Schwungkörper mit eingepreßtem Rotor; *S* Stator an der Kappe befestigt; *P* Rose; *O* Ringförmiger Schwimmer; *K* Schwimmerkessel, enthält Quecksilber; *St* Steuerstrich; *H* Mittelstift und Stromzuführung

Dabei ist J der Impuls des Kreisels, u die Winkelgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite.

Um die nachfolgenden Betrachtungen nicht unnötig kompliziert zu machen, wollen wir annehmen, daß der stets sehr kleine Winkel β_0 zu vernachlässigen sei, und auch bei laufendem Kreisel die Gleichgewichtslage der Kreiselachse in der Horizontalebene liege. Der Einfluß der Inklination für den Magnetkompaß ist von W. Thomson ausführlich behandelt. Seine Gleichungen gelten ohne weiteres auch für den Kreiselkompaß, wenn man nur die entsprechenden Werte für »Richtkraft« und »Inklination« ($= \beta_0$) einsetzt. Ein nachweisbarer Fehler des Kompasses kann nach den Betrachtungen von Thomson nicht entstehen.

I. Einkreisel-Kompasse.

1. Anschütz-Kompaß mit Einem Kreisel. Abb. 2 stellt die Draufsicht auf die Kompaßrose dar. Mit $N-S$ ist die Richtung der Kreiselachse bezeichnet. Unter einem Winkel ε hierzu liegt die Ebene des erzwingenden Kräftepaares (in der Abbildung mit EE bezeichnet); senkrecht zu dieser steht der Momenten-Vektor M. Das Moment sei dargestellt durch die Funktion $M \sin Nt$. In der Praxis werden die Störungsmomente allerdings keine einfachen Sinusfunktionen sein, jedoch läßt sich, wie bekannt, jede beliebige periodische Funktion in eine Reihe von Sinusfunktionen zerlegen. Es ist demnach nur notwendig, für jedes einzelne Glied der Reihe den Fehler getrennt zu ermitteln und den resultierenden Fehler durch Addition der Einzelresultate zu bilden; daß dies erlaubt ist, wird später bewiesen.

$\frac{N}{2\,\pi}$ ist die »Periodenzahl« des erzwingenden Momentes. Das Moment zerlegt sich nun in 2 Komponenten

$$M \sin Nt \sin \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

um die Rotationsachse und

$$-M \sin Nt \cos \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

um die Knotenlinie des Kreisels. Hierbei ist angenommen, daß der Momenten-Vektor M in der Horizontalebene liegt.

Das letztere Moment allein verursacht kleine Schwingungen des Kreiselkompasses um den Meridian. Es führt hierbei zu ganz unbedeutenden Störungen der Kompaß-

weisung, die durch Versuche nicht mehr nachweisbar sind. Sie können bei der folgenden Betrachtung vernachlässigt werden [1]). Das Moment um die Rotationsachse des Kreisels verursacht die wesentlichen erzwungenen Schwingungen des Kompaß-Systemes, die sich berechnen lassen. Zur Aufstellung der Gleichung betrachten wir Abb. 3.

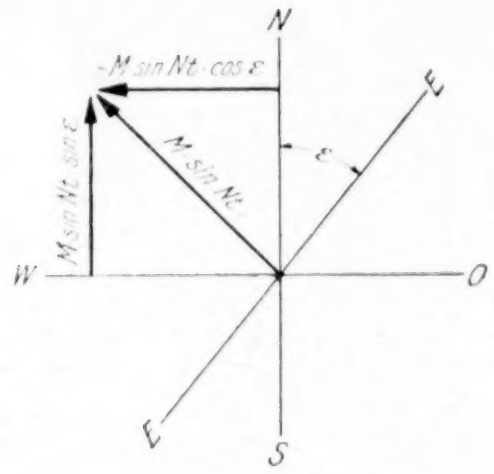


Abb. 2

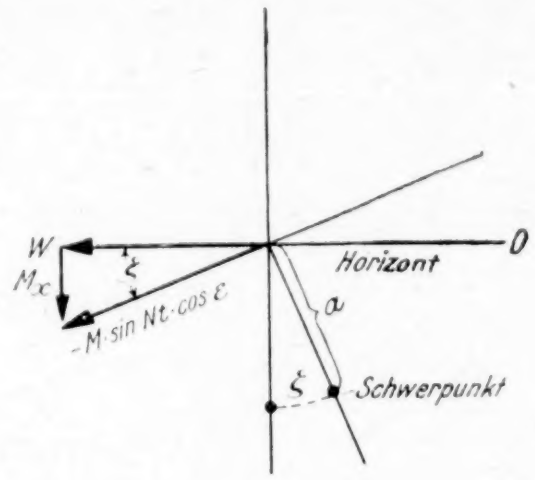


Abb. 3

Das Bild gibt einen vertikalen Schnitt durch das Kompaß-System in der O.-W.-Ebene, a ist die Schwerpunktstieferlage, ζ der Winkel, um den das System um die Rotationsachse aus der Horizontalebene gedreht ist. Für ζ lautet die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen:

$$A\frac{d^2\zeta}{dt^2} + f\frac{d\zeta}{dt} + m\,g\,a\,\zeta = M \sin Nt \sin\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hier bedeutet A das Trägheitsmoment der Anordnung um die Schwingungsachse, f den Koeffizienten der Flüssigkeitsreibung und $m\,g\,a$ das Schweremoment des Kompasses. Aus diesem Ansatz geht hervor, daß der Schwerpunkt Schwingungen in der Ost-West Ebene um seine Mittellage ausführen muß. Da nun die erzwingenden Momente aus Beschleunigungsdrücken hervorgehen, die am Schwerpunkt angreifen, so neigt sich ihre Komponente in der Ost-West-Richtung $= -M \sin Nt \cos\varepsilon$ um diesen Winkel ζ, und es entsteht hierbei eine Vertikal-Komponente:

$$M_x = -M \sin Nt \cos\varepsilon \sin\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Allerdings stimmt nun unsere Zerlegung Gl. (1) und (2) nicht mehr genau, da diese in der Horizontalebene vorgenommen wurde, während sich die Ebene des Momenten-Vektors um den Winkel ζ hierzu neigt. Es wäre also ein Korrekturglied mit $\cos\zeta$ hinzuzusetzen. In der Praxis wird jedoch der Winkel ζ immer nur wenige Grade betragen, so daß unser Ansatz genau genug stimmt. Aus dem gleichen Grunde ist auch in der Gl. (3) der Winkel ζ statt des sinus eingeführt. Es ist nun möglich, aus Gl. (3) den Winkel ζ zu berechnen und in Gl. (4) einzusetzen; man erhält dann die Größe des Momentes M_x. Zu diesem Zwecke haben wir die Differentialgleichung (3) aufzulösen. Bezeichnen wir mit n_0 die Eigenschwingungszahl des Systems um die Rotationsachse des Kreisels (in der Ebene des Winkels ζ), d. h. die Anzahl ganzer ungedämpfter Schwingungen in 2π Sekunden, die das System nach einem Anstoß sich selbst überlassen ausführt, dann erhalten wir:

$$\zeta = \frac{M \sin\varepsilon}{A} \frac{\sin(Nt-\psi)}{\sqrt{(n_0^2 - N^2)^2 + N^2\left(\frac{f}{A}\right)^2}} = \frac{M \sin\varepsilon}{A\,N_1^2} \sin(Nt-\psi) = \zeta_0 \sin(Nt-\psi) \quad . \quad (5).$$

Der in der Gleichung vorkommende Winkel ψ ist die Phasenverschiebung des erregenden Momentes gegen die Rosenschwingung, ζ_0 der Maximalwert von ζ:

$$\zeta_0 = \frac{M \sin\varepsilon}{A\,N_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Nachdem wir nun den Winkel ζ errechnet haben, greifen wir auf unsere Gleichung (4) zurück. Da ζ klein bleiben soll, so können wir auch hier sinus mit Winkel vertauschen und erhalten:

---

[1]) Näheres siehe S. 246.

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -M \sin Nt \cos\varepsilon\, \zeta_0 \sin(Nt-\psi) \\ &= -M \sin^2 Nt \cos\varepsilon \cos\psi\, \zeta_0 + \frac{M}{2} \cos\varepsilon\, \zeta_0 \sin 2Nt \sin\psi \\ &= -\frac{M}{2}\zeta_0 \cos\varepsilon \cos\psi + \frac{M}{2}\zeta_0 \cos(2Nt-\psi)\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7).$$

Setzen wir noch den Wert ζ_0 aus Gl. (6) ein, so ergibt sich:

$$M_x = \frac{M^2 \sin 2\varepsilon}{4 A N_1^2}\left[\cos(2Nt-\psi) - \cos\psi\right] \quad \ldots \quad (8).$$

Das erste Glied enthält die periodische Funktion $\cos(2Nt-\psi)$, d. h. das Moment hat die doppelte Periodenzahl wie das Störungsmoment. Es kann jedoch bei der langen Schwingungszeit des Kreiselkompasses keinen Weisungsfehler des Kompasses hervorrufen, da es periodisch sowohl positiv wie negativ wird. Dagegen enthält das zweite Glied keine periodische Funktion mehr; es hängt nur ab von der Größe des erzwingenden Momentes, dem Trägheitsmoment des Systems um die Rotationsachse, dem Verhältnis der Eigenschwingungszahl des Systems zu der des Störungsmoments und von der Reibung f. Es wird ein Maximum für $\varepsilon = 45^0$, also wenn die Störungsmomente in die Interkardinalkurse fallen und verschwindet für $\varepsilon = 0^0$, 90^0, 180^0 und 270^0. Um eine handlichere Form zu bekommen, wollen wir den Ausdruck $\frac{\cos\psi}{A N_1^2}$ umformen. Es gilt nun:

$$N_1^4 = (n_0^2 - N^2)^2 + N^2\left(\frac{f}{A}\right)^2; \quad A = \frac{m g a}{n_0^2}; \quad \sigma = \frac{f}{A}; \quad \cos\psi = \frac{n_0^2 - N^2}{N_1^2} \quad (9).$$

Setzen wir diese Größen ein, so erhalten wir:

$$\frac{\cos\psi}{A N_1^2} = \frac{1}{m g a}\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 \frac{\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 - 1}{\left[\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 - 1\right]^2 + \frac{\sigma^2}{N^2}} \quad \ldots \quad (10).$$

In der Regel ist nun der Reibungsfaktor des Systems um die Nord-Süd-Achse in der Flüssigkeit nicht bekannt, sondern nur das logarithmische Dekrement λ der Schwingung. Wir setzen deshalb $\sigma = 2 n_0' \frac{\lambda}{\pi}$, wo n_0' die gedämpfte Schwingungszeit der Rose um die Nord-Süd-Richtung bedeutet, oder da gilt:

$$n_0' = n_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}},$$

so wird

$$\sigma = \frac{2 n_0}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + 1}} \quad \ldots \quad (11).$$

Setzen wir nun diesen Wert in (10) ein, so erhalten wir

$$\frac{\cos\psi}{A N_1^2} = \frac{1}{m g a}\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 \frac{\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 - 1}{\left[\left(\frac{n_0}{N}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{n_0}{N}\right)^2 \frac{4}{\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{m g a}\Xi \quad \ldots \quad (12).$$

Die Größe Ξ ist nur mehr vom Verhältnis der Schwingungszahlen $\frac{n_0}{N}$ und von dem logarithmischen Dekrement der Schwingung λ abhängig. Wir greifen wieder zu unserer Gleichung (8) zurück. Mit Benutzung der eben errechneten Größen ergibt sich das Moment, das den Kompaß aus seiner Richtung bringt, gleich dem zweiten Gliede der Gleichung (8):

$$M_{x1} = -M^2 \sin 2\varepsilon \frac{1}{4 m g a}\Xi \quad \ldots \quad (13).$$

Die Gleichgewichtslage des Kompasses ergibt sich aus der Bedingung, daß die Richtkraft gleich sein muß dem Störungsmoment. Der Kompaßfehler ist gleich dem Abstand der Gleichgewichtslage vom Meridian, wenn die Störung solange anhält, daß der Kompaß einschwingen kann. Bei kurzen Störungen erhält man den Fehler durch Ver-

folgung der Schwingungskurve des Kompasses nach der neuen Gleichgewichtslage. Dies macht keine Schwierigkeit. Es genügt, den Fehlerwinkel α_0 der Gleichgewichtslage zu kennen. Er bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\sin \alpha_0 = - \frac{M^2 \sin 2\varepsilon \, \Xi}{4 m g a R}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

wenn R die Richtkraft des Kompasses bedeutet. Bestehen die erzwingenden Momente in Beschleunigungsdrücken, was beim Kompaß immer der Fall ist, so kann man setzen

$$M \sin Nt = m a \gamma \sin Nt,$$

worin γ die größte Beschleunigung ist, und es wird für diesen Fall:

$$\sin \alpha_0 = - \frac{m g a}{4 R} \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \sin 2\varepsilon \, \Xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Nun ist aber für den Kompaß:

$$\frac{m g a}{R} = \left(\frac{2\pi}{T_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

wenn T_s die ungedämpfte Schwingungszeit des Kompasses, U die Rotationsgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite bedeutet, und mit Verwendung dieser Größen schreibt sich Gl. (15):

$$\sin \alpha_0 = - \left(\frac{\pi}{T_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2 \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \sin 2\varepsilon \, \Xi \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

2. Diskussion der Fehlergleichung. Um nun den Kompaßfehler α_0 möglichst klein zu halten, wäre es nötig, T_s groß zu machen. Dies ist aber für den Kompaß ungünstig, da dadurch die Einstellungszeit zu sehr verlängert wird. Andererseits nützt es gar nichts, den Kreisel zu vergrößern oder die Richtkraft des Kompasses zu vermehren, da diese Größen in Gl. (17) gar nicht vorkommen. Das einzige Glied, über das wir noch verfügen, ist die Funktion Ξ, die von dem Verhältnis der Schwingungszahlen $\frac{n_0}{N}$ abhängt. Die Funktion Ξ kann in Kurven abhängig von $\frac{n_0}{N}$ dargestellt werden. Es ergibt sich, daß Ξ klein wird, wenn N ein bedeutendes Vielfaches gegen n_0 wird, d. h. die Eigenschwingungszahl des Systems um die Nord-Süd-Linie muß sehr klein gewählt werden. Nach der Rechnung wird der Fehler zu Null, wenn n_0 verschwindend klein wird. Dies ist selbstverständlich, da wir bei den Ableitungen der Gleichungen davon ausgegangen sind, daß das Kompaß-System nur Schwingungen um die Kreiselachse ausführen kann, während um die Ost-West-Achse keine Schwingungen erfolgen sollen. Wir wissen nun aus der Pendellehre, daß bei periodischen Anstößen dann keine Drehbewegungen um die Vertikale resultieren, wenn die Trägheitsmomente des Körpers in allen Achsen der Horizontalebene vollkommen gleich sind. Dieser Satz ist in unserem Falle dahingehend zu erweitern, daß auch die Schwingungszeiten eines Kreiselkompasses sowohl in der Vertikalebene durch Nord-Süd, wie in der Vertikalebene durch Ost-West gleich sein müssen. Da nun die Kompaßschwingung gegenüber der Schwingung des Systems um Nord-Süd für unendlich lang angesehen wurde, so ergibt die Rechnung den idealen Wert n_0 unendlich klein. In der Praxis reicht zur Herabdrückung des Fehlers durch Schiffsbewegungen schon eine grobe Annäherung an den Idealfall aus, wie Zahlenbeispiele leicht beweisen. Für $\frac{n_0}{N} = {}^1/_{10}$ werden die Fehler bereits unbedeutend. Eine so kleine Schwingungszahl kann jedoch durch Vergrößerung der Trägheitsmomente nicht mehr erreicht werden. Es ist notwendig, die Rose um die Nord-Süd-Linie als Kreiselpendel auszubilden.

Aus dieser Ueberlegung ist die Konstruktion des Dreikreiselkompasses hervorgegangen. Die Schwingungszeit der Rose um die Nord-Süd-Achse ist durch Kreiselkräfte auf etwa 60 Sekunden verlängert. Da die Schlingerperiode des Schiffes höchstens 12 Sekunden beträgt, so wird das Verhältnis $\frac{n_0}{N}$ kleiner als ${}^1/_5$. Hierfür ergibt sich $\Xi = - 0{,}042$. Dieser Wert ist allerdings für den Einkreiselkompaß berechnet und bildet für den Dreikreiselkompaß nur eine grobe Annäherung. Die genaue Fehlerberechnung des Dreikreiselkompasses ist später durchgeführt.

Für $\frac{n_0}{N} = \infty$ wird $\Xi = 1$, der Winkel α_0 wird negativ, die Kreiselachse sucht sich senkrecht zur Erschütterungsebene zu stellen.

In der Nähe von $\frac{n_0}{N} = 1$ wächst Ξ sehr stark, die Größe des Wertes hängt fast nur von der Dämpfung ab, wie dies bei allen erzwungenen Schwingungen der Fall ist.

Für $\frac{n_0}{N} = 1$ wird Ξ zu 0. Wir haben Harmonie zwischen Störungsmoment und Eigenschwingung der Rose.

Für $\frac{n_0}{N} < 1$ wird Ξ negativ, der Winkel α, positiv. Die Kreiselachse sucht sich in die Erschütterungsebene zu stellen. Die Kurve nähert sich auf dieser Seite asymptotisch dem Werte 0.

Wenn man den Kompaß genau für ein bestimmtes Erschütterungsmoment harmonisch abstimmt, so können demnach auch keine Fehler entstehen. In der Praxis ist dies jedoch nicht möglich, da die Schlingerperiode des Schiffes sich je nach dem Seegang ändert und in der Nähe des harmonischen Punktes die Funktion Ξ gerade die größten Werte annimmt. Als einzig sicherer Weg bleibt demnach, wie oben schon dargelegt, nur die Möglichkeit, das Verhältnis $\frac{n_0}{N}$ möglichst klein zu machen.

Zum Schluß sei noch der Beweis erbracht, daß es erlaubt ist, für eine Fouriersche Reihe den Fehler jedes Gliedes getrennt zu bestimmen und den resultierenden Fehler durch Addition der Einzelresultate zu bilden. Greifen wir auf Gl. (7) zurück, welche uns das Fehlermoment M_x angibt, und führen wir statt der einfachen sinus-Funktion die Reihe ein, von der nur die beiden ersten Glieder angeschrieben sind, so haben wir

$$M_x = [M_1 \sin Nt + M_2 \sin(2Nt + q_2) + \ldots] \\ [\zeta_1 \sin(Nt - \psi_1) + \zeta_2 \sin(2Nt + q_2 - \psi_2) + \ldots] \cos\varepsilon.$$

Multiplizieren wir aus und schreiben wieder nur die ersten vier Glieder an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} M_x = \quad & M_1 \zeta_1 \sin Nt \sin(Nt - \psi_1) \cos\varepsilon \\ & + M_2 \zeta_1 \sin(2Nt + q_2) \sin(Nt - \psi_1) \cos\varepsilon \\ & + M_1 \zeta_2 \sin Nt \sin(2Nt + q_2 - \psi_2) \cos\varepsilon \\ & + M_2 \zeta_2 \sin(2Nt + q_2) \sin(2Nt + q_2 - \psi_2) \cos\varepsilon \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Das erste Glied gibt den Fehler der Grundwelle der Fourierschen Reihe. Es deckt sich genau mit der bisher behandelten Fehlergleichung. Das 4. Glied entspricht im Aufbau dem ersten Gliede, wenn man für $(2Nt + q_2)$ einen neuen Winkel setzt. Dies ergibt offenbar den Fehler der zweiten Welle der Fourierschen Reihe. Unsere oben aufgestellte Behauptung ist also nur dann richtig, wenn das 2. und 3. Glied zu Null werden. Wenn wir die Produkte auflösen, so erhalten wir keine quadratischen Winkelfunktionen der veränderlichen t, sondern nur Produkte verschiedener Schwingungszahlen wie etwa: $\sin 2Nt \sin Nt$. Dies sind aber periodische Funktionen, deren Integrale über die ganze Wellenlänge zu Null werden. Sie können also keinen Kompaßfehler verursachen. Was hier für das 2. Glied der Fourierschen Reihe bewiesen wurde, gilt natürlich für jedes beliebige Glied. Der gesamte Fehler kann also durch Addition der getrennt bestimmten Fehler der einzelnen Glieder der Reihe gefunden werden.

In ähnlicher Weise wie die Fehler des Einkreiselkompasses von Anschütz können auch diejenigen anderer Kompaßkonstruktionen mit einem Kreisel berechnet werden. Man gelangt dann gleichfalls zu einer Funktion, welche für die betreffende Konstruktion charakteristisch ist. So hat zum Beispiel der Verfasser die Fehlerkurve des amerikanischen Sperry-Kompasses berechnet, der hauptsächlich in Entente-Ländern eine größere Verbreitung gefunden hat. Bei den späteren Kurven ist die Funktion dieses Kompasses mit Σ bezeichnet.

II. Der Mehrkreisel-Kompaß.

Bei der Berechnung der Schlingerfehler des Einkreiselkompasses ergab sich, daß der Fehler um so kleiner wird, je größer die Eigenschwingungszeit des Kompaß-Systems um Nord-Süd gewählt wird. Eine lange Schwingungszeit eines Pendels erhält man aber am einfachsten durch Einbau von Kreiseln zur Stabilisierung: durch Ausbildung des Pendels zu einem »Kreiselpendel«. Demgemäß konstruiert man die Rose um die Nord-Süd-Linie als Kreiselpendel und gelangt so zu Zwei- und Dreikreisel-Apparaten. Um nun die Fehler eines solchen Kompasses bei Seegang errechnen zu können, müssen wir die

Bewegungen eines Kreiselpendels unter Einfluß periodischer Anstöße kennen. Diese Aufgabe soll demnach erst allgemein behandelt werden, da sie für viele andere Konstruktionen ebenfalls von Bedeutung ist.

1. Freie Schwingungen eines Kreiselpendels. Ein Kreiselpendel besteht aus einem Pendel P, in das ein Kreisel K mit vertikaler Rotationsachse eingebaut ist. Das Pendel schwingt um die Zapfen $1\,1'$, während der Kreiselrahmen um die dazu senkrechten Zapfen $2\,2'$ ausschlagen kann. Wir haben es also mit einem Kreiselverband von drei Freiheitsgraden zu tun. Der Ausschlagwinkel des Pendels zur Vertikalen sei mit φ, der des Kreiselrahmens zur Vertikalen mit χ bezeichnet. Das Pendel sei in der Vertikalen durch das Schweremoment $m_1\,g\,s_1$ gefesselt, der Kreiselrahmen in der dazu senkrechten Ebene durch das Schweremoment $m_2\,g\,s_2$. Um die Zapfen $1\,1'$ wirkt also ein äußeres Moment $m_1\,g\,s_1 \sin\varphi$, um die Zapfen $2\,2'$ ein äußeres Moment $m_2\,g\,s_2 \sin\chi$, beide Momente suchen die Kreiselachse in die Vertikale zurückzuführen. Das Trägheitsmoment des Verbandes um die Achse $1\,1'$ sei Θ_1, um die Zapfen $2\,2'$ Θ_2; der Impuls des Kreisels $= J$. Die Reibung, welche in den Lagern $1\,1'$ und $2\,2'$ entsteht, sei vernachlässigt. Die Winkel φ und χ sollen so klein bleiben, daß Sinus und Winkel vertauscht werden können und der Kosinus den Wert 1 behält. Die Rechnung ist demnach nur mehr streng genau für den Grenzfall kleiner Winkel.

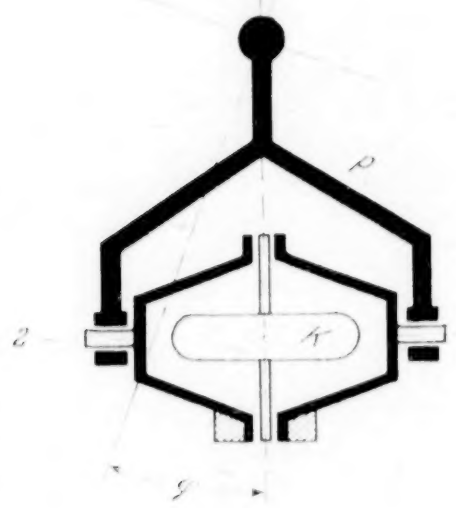


Abb. 4

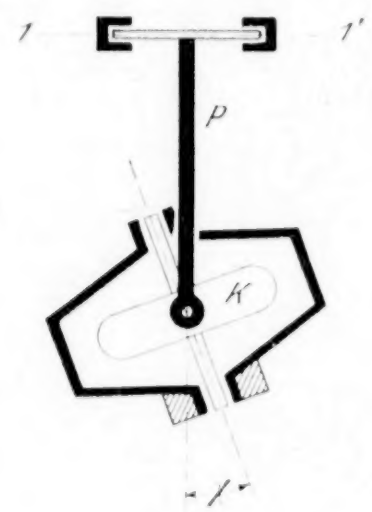


Abb. 5

Dieser Kreiselverband kann freie Schwingungen ausführen. Um dieselben zu errechnen, stellen wir die Eulerschen Gleichungen um die Zapfen $1\,1'$ und $2\,2'$ auf.

Wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1 s_1 g \varphi + J \frac{d\chi}{dt} = 0 \\ \Theta_2 \frac{d^2\chi}{dt^2} + m_2 s_2 g \chi - J \frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18).$$

Diese Gleichungen dividieren wir durch Θ_1 bezw. Θ_2 und führen die Schwingungszahlen des Kreiselpendels in der Ebene des Winkels φ und χ bei nichtlaufendem Kreisel ein. Dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} n_1' = \sqrt{\frac{m_1 s_1 g}{\Theta_1}} = \text{Schwingungszahl in der Ebene des Winkels } \varphi \\ n_2' = \sqrt{\frac{m_2 s_2 g}{\Theta_2}} = \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \chi \end{aligned}\right\} \quad . \quad (19).$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + n_1'^2\,\varphi + \frac{J}{\Theta_1}\frac{d\chi}{dt} = 0 \\ \frac{d^2\chi}{dt^2} + n_2'^2\,\chi - \frac{J}{\Theta_2}\frac{d\varphi}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (20).$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist bekannt. Wir wissen, daß wir Schwingungen erhalten müssen und setzen demnach:

$$\varphi = \Phi e^{int}; \qquad \chi = X e^{int}.$$

So schreiben sich die Gl. (20):

$$\Phi\,(-n^2 + n_1'^2) + in\,X\,\frac{J}{\Theta_1} = 0$$

$$X\,(-n^2 + n_2'^2) - in\,\Phi\,\frac{J}{\Theta_2} = 0.$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{\varphi}{X} = \frac{-inJ}{(-n^2 + n_1'^2)\,\Theta_1} = \frac{(-n^2 + n_2'^2)\,\Theta_2}{inJ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

und die gesuchte Schwingungszahl n des Kreiselpendels ergibt sich aus der Gleichung 4. Grades:

$$n^4 - n^2\left(n_1'^2 + n_2'^2 + \frac{J^2}{\Theta_1\,\Theta_2}\right) + n_1'^2\,n_2'^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$n_1'^2 + n_2'^2 + \frac{J^2}{\Theta_1\,\Theta_2} = a \text{ und } n_1'^2\,n_2'^2 = b,$$

dann errechnen sich die Schwingungszahlen des Kreiselpendels zu:

$$n_1 = \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}}, \qquad n_2 = \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}} \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Der Ausschlagwinkel des Kreiselpendels wird:

$$\varphi = \varphi_1 \sin n_1 t + \varphi_2 \sin (n_2 t + r) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Das Pendel vollführt also zwei übereinander gelagerte Schwingungen mit den Schwingungszahlen n_1 und n_2, wobei Ausschlag und Phasenverschiebung beider Schwingungen völlig unabhängig voneinander sind. Erstere Schwingung ist die langsamere, sie ist als Grund- oder Präzessionsschwingung, letztere als Nutationsschwingung des Kreiselpendels bezeichnet. r ist der Phasenverschiebungswinkel der beiden Schwingungen zu Beginn der Zeit. φ_1 und φ_2 sind die maximalen Ausschläge der Präzessions- bezw. Nutationsschwingung.

Der Ausschlagwinkel χ des Kreiselrahmens wird durch eine ähnlich aufgebaute Gleichung bestimmt:

$$\chi = X_1 \cos n_1 t + X_2 \cos (n_2 t + r) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Die Schwingungen in der Ebene des Winkels φ und in der des Winkels χ sind zeitlich um 90^0 versetzt, wenn die Reibung gleich 0 gesetzt wird. Dies zeigt der Faktor $-i$ der Gl. (21). Aus dieser Gleichung ergibt sich ferner das Verhältnis des Maximalausschlages φ_1 zu dem Maximalausschlag X_1 bezw. φ_2 zu X_2:

$$\frac{\varphi_1}{X_1} = \frac{-n_1}{(n_1^2 - n_1'^2)}\,\frac{J}{\Theta_1}; \qquad \frac{\varphi_2}{X_2} = \frac{-n_2}{(n_2^2 - n_1'^2)}\,\frac{J}{\Theta_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26).$$

Ferner gilt die Beziehung:

$$n_1^2 + n_2^2 = a = n_1'^2 + n_2'^2 + \frac{J^2}{\Theta_1\,\Theta_2} \text{ und } n_1^2\,n_2^2 = b = n_1'^2\,n_2'^2 \quad \ldots \quad (27).$$

Die letzte Gleichung sagt aus: Das Produkt der Schwingungszahlen des Pendels in der Ebene des Winkels φ und χ bei nichtlaufendem Kreisel ist gleich dem Produkt von Präzessionsschwingungszahl und Nutationsschwingungszahl bei laufendem Kreisel. Man hat in dieser Gleichung ein einfaches Mittel, die Nutationsschwingungszahl zu errechnen, wenn sie sich der direkten Beobachtung entzieht.

Für den Fall, daß der Kreiselimpuls groß wird, gelten folgende Näherungsgleichungen:

$$n_1 \sim \frac{g\sqrt{m_1\,s_1\,m_2\,s_2}}{J}; \qquad \frac{\varphi_1}{X_1} \sim \sqrt{\frac{m_2\,s_2}{m_1\,s_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28),$$

$$n_2 \sim \frac{J}{\sqrt{\Theta_1\,\Theta_2}}; \qquad \frac{\varphi_2}{X_2} \sim \sqrt{\frac{\Theta_2}{\Theta_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29).$$

2. Erzwungene Schwingungen eines Kreiselpendels. Es soll nun ein äußeres periodisches Moment um die Zapfen $11'$ auf das Kreiselpendel wirken. Dasselbe sei dargestellt durch die Funktion $M \sin Nt$. Um die erzwungenen Schwingungen zu berechnen, kehren wir wieder zu den Eulerschen Gleichungen zurück. Sie lauten jetzt:

$$\Theta_1\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1\,s_1\,g\,\varphi + J\frac{d\chi}{dt} = M \sin Nt; \qquad \Theta_2\frac{d^2\chi}{dt^2} + m_2\,s_2\,g\,\chi - J\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (30)$$

oder in anderer Fassung mit Einführung der Schwingungszahlen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n_1'^2\,\varphi + \frac{J}{\Theta_1}\frac{d\chi}{dt} = \frac{M}{\Theta_1} \sin Nt; \qquad \frac{d^2\chi}{dt^2} + \qquad \frac{J}{\Theta_2\,dt} = 0 \quad \ldots \quad (31).$$

Setzen wir ähnlich wie früher:

$$\varphi = \varphi_0 e^{iNt}; \qquad \chi = \chi_0 e^{iNt};$$ und statt $M \sin Nt$ schreiben wir $M e^{iNt}$,

dann erhalten wir:

$$\varphi_0 (-N^2 + n_1'^2) + iN\chi_0 \frac{J}{\Theta_1} = \frac{M}{\Theta_1}; \qquad \chi_0 (-N^2 + n_2'^2) - iN\varphi_0 \frac{J}{\Theta_2} = 0.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\chi_0}{\varphi_0} = \frac{iN}{(n_2'^2 - N^2)} \frac{J}{\Theta_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

und mit Benutzung von (27)

$$\varphi_0 = \frac{(n_2'^2 - N^2)}{\left[N^4 + n_1'^2 n_2'^2 - N^2\left(n_1'^2 + n_2'^2 + \frac{J^2}{\Theta_1 \Theta_2}\right)\right]} \frac{M}{\Theta_1} = \frac{n_1'^2 (n_2'^2 - N^2)}{[N^4 - N^2 (n_1^2 + n_2^2) + n_1^2 n_2^2]} \frac{M}{m_1 g s_1} \quad (33).$$

φ_0 ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung, deren Gleichung lautet:

$$\varphi = \varphi_0 \sin Nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33\,a).$$

Wie bei allen erzwungenen Schwingungen, so stimmt auch beim Kreiselpendel die Periode der erzwungenen Schwingungen mit der Periode des Störungsmomentes überein. Die Schwingungen sind auch phasengleich mit dem Störungsmoment, da wir von Reibungskräften abgesehen haben. Ueber diese Schwingung lagert sich bei einem Anstoß noch die freie Schwingung des Kreiselpendels, die wir im vorherigen Abschnitt berechnet haben.

Die durch die Gl. (33) und (33a) dargestellte Bewegung zeigt große Aehnlichkeit mit der erzwungenen Schwingung eines Doppelpendels. φ_0 wird unendlich für $N = n_1$ und $N = n_2$, d. h. wenn Rosonanz zwischen dem Störungsmoment und der Präzessions- oder Nutationsschwingung des Kreiselpendels vorhanden ist. Vor allem fällt bei der Gleichung aber auf, daß φ_0 den Wert 0 ergibt, wenn $N = n_2'$, und zwar gilt dies in allen Fällen, solange der Impuls des Kreisels nicht verschwindet. Die Belastungsfähigkeit des Kreiselpendels ergibt sich aus der Bedingung, daß der Winkel χ_0 keine unzulässigen Größen annehmen darf. Dieser errechnet sich aus Gl. (32). Die beiden Unendlichkeitsstellen heben sich gegenseitig auf, und wir erhalten endliche Werte für den Winkel χ_0 auch im Falle $N = n_2'$, nämlich:

$$\chi_0 = \frac{-iM}{n_2' J} \text{ für } n_2' = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

Die Amplitude der erzwungenen Kreiselschwingung in der Ebene χ wird um so kleiner, je größer die Stabilität und der Impuls des Kreiselpendels gewählt wird. Der Ausschlag in der Ebene χ ist um eine Viertel-Periode gegenüber dem störenden Moment verzögert.

In diesem besonderen Falle also, wenn das erzwingende Moment in Resonanz mit den Schwingungen steht, die das Kreiselpendel bei nichtlaufendem Kreisel in der zum Moment senkrechten Ebene ausführt, bleibt das Pendel in der Ebene, in der das Moment wirkt, vollkommen in Ruhe und schwingt nur in der dazu senkrechten Ebene. In der Praxis ist diese vollkommene Resonanz allerdings nie zu erzielen. Man erhält bei einem Experiment immer Schwebungen, deren Perioden um so länger werden, je mehr man sich dem Fall der Resonanz nähert. Immerhin besteht in diesem Differenzglied $(n_2'^2 - N^2)$ der Hauptunterschied der hier abgeleiteten Gleichung gegenüber der Gleichung, welche für die erzwungene Schwingung des Fadenpendels gilt.

Wir wollen nun Gl. (33) so umformen, daß der Pendelausschlag abhängig von dem Verhältnis der Schwingungszahlen dargestellt ist.

Man erhält dann:

$$\varphi_0 = \frac{1 - \left(\frac{N}{n_2'}\right)^2}{\left(\frac{N}{n_1}\right)^2 \left(\frac{N}{n_2}\right)^2 - \left(\frac{N}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{N}{n_2}\right)^2 + 1} \frac{M}{m_1 s_1 g} \quad \ldots\ldots \quad (35).$$

Errechnet man für ein Fadenpendel von der Schwingungszahl n und dem Schweremoment msg den Schwingungsausschlag für ein erzwingendes Moment $M \sin Nt$, so erhält man den Schwingungsausschlag

$$H = \frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n}\right)^2} \frac{M}{msg}.$$

Nennt man die von dem Verhältnis der Schwingungszahlen abhängige Funktion $\frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n}\right)^2} = \Xi$, so kann man dieselbe als Kurve darstellen. Dies ist bei der Fehlerberechnung des Einkreiselkompasses bereits geschehen. Dementsprechend soll nun abkürzungsweise gesetzt werden:

$$\Xi_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n_1}\right)^2}; \quad \Xi_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n_2}\right)^2}; \quad \Xi_2' = \frac{1}{1 - \left(\frac{N}{n_2'}\right)^2} \quad \ldots \quad (36).$$

Die Werte Ξ_1, Ξ_2 und Ξ_2' können aus den Kurven abgegriffen werden. Setzt man diese Größen in Gl. (35) ein, so ergibt sich für den Ausschlag des Kreiselpendels:

$$\varphi_0 = \left[1 - \left(\frac{N}{n_2'}\right)^2\right] \Xi_1 \Xi_2 \frac{M}{m_1 s_1 g} = \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \frac{M}{m_1 s_1 g} \quad \ldots \quad (37).$$

Im allgemeinen wird man von einem Kreiselpendel möglichste Ruhe gegen alle äußeren Störungsmomente verlangen. Hierfür ist vor allen Dingen die Funktion Ξ_1 maßgebend. Bei einigermaßen schnell laufendem Kreisel kann dagegen in fast allen Fällen $\Xi_2 = 1$ gesetzt werden, da für ein Verhältnis $\frac{N}{n_2} = {}^1/_{10}$ der Fehler, der durch diese Vernachlässigung entsteht, nur mehr 1 vH wird. n_2 ist aber immer eine sehr große Zahl, denn die Nutationsschwingungen entziehen sich in den meisten Fällen überhaupt der optischen Beobachtung. Dagegen ist der Wert Ξ_2' für den Schwingungsausschlag von großer Bedeutung. Kann man vollkommene Harmonie, d. h. ungefähr auf 1 vH Genauigkeit erreichen, so wird der Wert Ξ_2' etwa 50, und man erhält dadurch nur ganz kleine Ausschläge des Kreiselpendels in der Ebene φ. Bei 10 vH Differenz der Schwingungszahlen sinkt der Wert etwa auf 5. Kommen in den Momenten Oberschwingungen von der doppelten Schwingungszahl vor, so wird hierfür der Wert Ξ_2' nur mehr ${}^1/_3$ und für Oberschwingungen von der vierfachen Periodenzahl sogar nur ${}^1/_{15}$. Bleibt dagegen die Schwingungszahl des Störungsmomentes kleiner als n_2', so nähert sich Ξ_2' dem Werte 1. Man sieht hieraus, daß die theoretisch günstigste Wahl $n_2' = N$ für die Praxis Gefahren in sich birgt. Im allgemeinen wird es am sichersten sein, n_2' möglichst groß zu halten, um einen weiten Abstand von dem gefährlichen Gebiete $n_2' < N$ zu bewahren[1]).

Ueber das Vorzeichen von φ_0 sei bemerkt, daß an dem Resonanzpunkte jeder Ξ-Funktion ein Wechsel des Vorzeichens eintritt. Will man nur den maximalen Ausschlag φ_0 des Pendels berechnen, so ist dieser Wechsel natürlich bedeutungslos. Er gewinnt erst Sinn, wenn wir Gl. (33a) betrachten. Das negative Vorzeichen sagt dann aus, daß die erzwungene Schwingung gegenüber dem Störungsmoment um 180° in der Phase verschoben ist.

3. Fehlweisung des Dreikreiselkompasses. Bei der folgenden Berechnung haben wir auf die errechneten Fehler des Einkreiselkompasses und die damals angesetzten Gleichungen zurückzugreifen. Wir haben wieder ein äußeres Störungsmoment $M \sin Nt$, dessen Ebene die Verbindungslinie Schwerpunkt-Aufhängepunkt enthalten muß, da alle äußeren Kräfte in dem Aufhängepunkt übertragen werden, während alle Massenkräfte im Schwerpunkt angreifen.

Der Uebersicht halber seien hier die Ausführungen, welche beim Einkreiselkompaß angegeben wurden, nochmals kurz wiederholt.

Abb. 2 stellt eine Aufsicht auf die Kompaßrose dar. Mit Nord-Süd ist die Achse des Kreisels bezeichnet. ε ist der Winkel zwischen der Ebene des Störungsmomentes

---

[1]) Vergl. Klein und Sommerfeld: Theorie des Kreisels, Bd. IV, S. 810 u. f. Die Berechnung des Schlickschen Schiffskreisels. Gl. (19) bei Sommerfeld ergibt bei entsprechender Aenderung der Bezeichnungen die gleichen Resultate wie unsere Gl. (35). Eine Ausnahme bildet das Vorzeichen, das bei Sommerfeld immer positiv angesetzt ist.

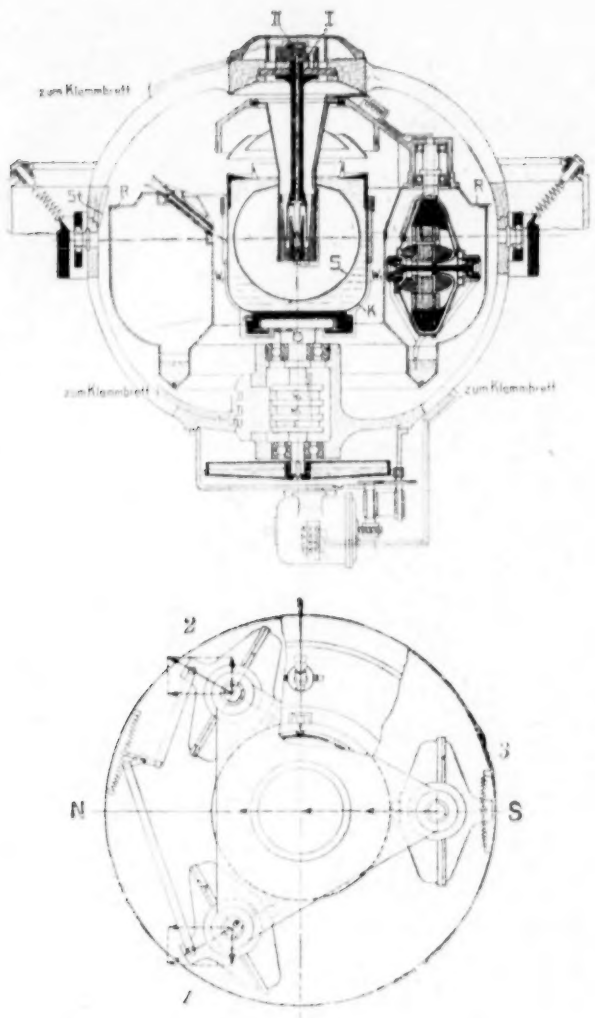


Abb. 6. Dreikreiselkompaß von Anschütz & Co.

Mit 1, 2 und 3 sind die drei Kreisel bezeichnet, von denen Kreisel 1 und 2 durch ein Gestänge so miteinander verbunden sind, daß ihre Winkel zur N-S-Linie der Rose gleich und entgegengesetzt sind. In ihrer normalen Lage werden sie durch Federn gehalten.

K Kessel mit Quecksilber gefüllt; *S* Kugelförmiger Schwimmer, der den Kompaß trägt; *R* Kompaß-Rose; *St* Steuerstrich.

und der Kreiselachse, gemessen in der Horizontalebene. Dann zerlegt sich das äußere Moment $M \sin Nt$ in zwei Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} -M \sin Nt \cos \varepsilon \\ M \sin Nt \sin \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{senkrecht zur Kreiselachse und} \quad \ldots \quad (38)$$

in Richtung der Kreiselachse.

Allerdings kann bei einem Dreikreiselkompaß nicht mehr von der Richtung der Kreiselachse gesprochen werden, da ja mehrere Kreisel mit verschiedenen Achsenrichtungen vorhanden sind. Wir haben dafür die Richtung des Gesamtimpulses des Systems zu setzen, die man durch graphische Addition aller Einzelimpulse erhält. Die beiden Komponenten, in die wir das äußere Moment zerlegt haben, fallen offenbar in die Vertikalebenen durch die beiden Hauptachsen des Kompaß-Systemes.

Führt das System Schwingungen um die Achse des Gesamtimpulses aus, so ändert sich dieser nicht der Richtung, sondern nur der Größe nach. Die schief gestellten Kreisel machen hierbei Präzessionsbewegungen in der Horizontalebene und werden durch Federzug wieder in ihre normale Lage zurück gebracht. Wir haben also ein Kreiselpendel nach den früheren Darlegungen vor uns, und zwar ist:

n_1' = die Schwingungszahl des Kompaßsystems um die Nord-Süd-Achse bei nicht laufenden Kreiseln,

n_2' = die Schwingungszahl der Kreisel um ihre vertikalen Drehzapfen unter Einwirkung der Federn bei nicht laufenden Kreiseln,

n_1 = die Grundschwingungszahl des Systems um Nord-Süd bei laufenden Kreiseln,

n_2 = die Nutationsschwingungszahl des Systems um Nord-Süd bei laufenden Kreiseln.

Hierbei muß $n_1 n_2$ stets gleich $n_1' n_2'$ sein (vergl. Gl. 27).

Betrachten wir dagegen Schwingungen des Systemes in Richtung des Gesamtimpulses, also um die Ost-West-Achse der Kompaßrose, so haben wir hier als Moment, das in der Horizontalebene wirkt und die Kreisel in ihre Normallage zurückführt, die »Richtkraft« des Kompasses. Die Anordnung bildet ebenfalls ein Kreiselpendel, und es ist dann für diese Achse:

n_1 = Schwingungszahl des Kompasses um die Ost-West-Achse gleich der Schwingungszahl durch den Meridian bei laufenden Kreiseln,

n_2 = dazugehörige Nutationsschwingungszahl,

n_1' = Schwingungszahl des Systemes um die Ost-West-Achse bei nicht laufenden Kreiseln = n_1' um die Nord-Süd-Achse bei symmetrischem Kompaßsystem,

n_2' = Schwingungszahl des Kompasses um die Vertikale bei nicht laufenden Kreiseln, falls die Richtkraft wie bei laufenden Kreiseln vorhanden wäre.

Nun ist bei dem Kreiselkompaß n_1 eine sehr kleine Zahl, da ja eine Kompaßschwingung 1 bis $1^1/_2$ Stunden dauert. Ferner beweist ein Versuch, daß n_2 eine sehr große Zahl ist, da die Nutationsschwingung für das Auge nicht wahrnehmbar ist. Die Funktion Ξ_2 ist demnach gleich 1, während die Funktion Ξ_1 eine sehr kleine Zahl ist (etwa von der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-6}). Man kann also in erster Annäherung die Richtung des Kreiselimpulses als unveränderlich annehmen. Die Rechnung vereinfacht sich dann, indem wir nur die Schwingungen um die Impulsachse zu betrachten brauchen.

Betrachten wir nun Abb. 3 wieder. Sie stellt einen Vertikalschnitt durch die Ost-West-Linie der Kompaßrose dar. Der Schnitt steht senkrecht zum Gesamtimpuls, da dieser im Gleichgewichtsfalle der Kompaßrose horizontal liegt. ζ ist der Winkel, um den das Kompaßsystem um die Impulsachse zur Horizontalen geneigt ist. Um diesen Winkel ζ neigt sich hierbei auch der Vektor des Störungsmomentes, und wir erhalten hierbei eine vertikale Komponente

$$M_x = - M \sin Nt \cos \varepsilon \sin \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39),$$

oder falls wir Sinus und Winkel vertauschen

$$M_x = - M \sin Nt \cos \varepsilon \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39a).$$

Der Winkel ζ errechnet sich nun für ein äußeres Moment $= M \sin Nt \sin \varepsilon$ nach Gl. (37) und (33a)

$$\zeta = \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \frac{M \sin \varepsilon \sin Nt}{mga} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Hierbei ist mga das Schweremoment des Kompasses. Durch Kombination von Gl. (39a) und (40) ergibt sich nun

$$\left.\begin{aligned} M_x &= - \frac{M^2}{mga} \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \frac{\sin 2\varepsilon}{2} \sin^2 Nt \\ &= - \frac{M^2}{4 mga} \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \sin 2\varepsilon (1 - \cos 2Nt) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Wie beim Einkreiselkompaß zerfällt also das vertikale Drehmoment M_x, das die Fehlerweisung des Kompasses veranlaßt, in ein stetiges Drehmoment nach einer Seite und in ein rhythmisches Moment von doppelter Periodenzahl. Ersteres ist von der Lage der Kompaßrose zur Ebene des periodischen Störungsmomentes abhängig und erreicht seine Maximalwerte auf den Interkardinalkursen. Letzteres hat für uns kein weiteres Interesse, da es zu keinen Kompaßfehlern führen kann.

Bezeichnen wir mit M_f das Moment, das uns den Kompaßfehler bringt, so ist

$$M_f = - \frac{M^2}{4 mga} \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \sin 2\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Und der Fehlerwinkel α_0 des Kompasses ergibt sich

$$\sin \alpha_0 = \frac{M_f}{R} = - \frac{M^2}{4 mga} \frac{1}{R} \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \sin 2\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Nun ist aber M beim Kompaß das Moment von Beschleunigungskräften und läßt sich demnach auch $ma\gamma$ schreiben. Ferner ist für den Kreiselkompaß (siehe Gl. (16)):

$$\frac{mga}{R} = \left(\frac{2\pi}{T_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Demnach erhalten wir als Fehlerweisung des Kompasses:

$$\sin \alpha_0 = - \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \left(\frac{\pi}{T_s} \frac{1}{U \cos \varphi}\right)^2 \frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'} \sin 2\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Diese Gleichung stimmt mit Gl. (17) des Einkreiselkompasses im Aufbau vollkommen überein, nur daß an Stelle der einfachen Funktion Ξ die kompliziertere $\frac{\Xi_1 \Xi_2}{\Xi_2'}$ getreten ist. Je nachdem diese Funktion positives oder negatives Vorzeichen besitzt, haben wir vier Hauptfälle zu unterscheiden. Wir müssen uns daran erinnern, daß $n_1 < n_2' < n_2$ ist. Dann gilt

1. $N < n_1$ und damit auch $N < n_2' < n_2$: Ξ_1, Ξ_2 und Ξ_2' positiv : sin α_0 negativ, die Nord-Süd-Linie der Kompaßrose sucht sich senkrecht zur Erschütterungsebene zu stellen.
2. $n_1 < N < n_2' < n_2$: Ξ_1 negativ Ξ_2' und Ξ_2 positiv : sin α_0 positiv, die Nord-Süd-Linie der Kompaßrose sucht sich in die Erschütterungsebene zu drehen.
3. $n_1 < n_2' < N < n_2$: Ξ_1 und Ξ_2' negativ Ξ_2 positiv : sin α_0 negativ, die Nord-Süd-Linie der Kompaßrose sucht sich senkrecht zur Erschütterungsebene zu stellen.
4. $n_1 < n_2' < n_2 < N$: Ξ_1, Ξ_2' und Ξ_2 negativ : sin α_0 positiv, die Nord-Süd-Linie der Kompaßrose sucht sich in die Erschütterungsebene zu drehen;
   für $N = n_1$ und $N = n_2$ wird der Fehler des Kompasses unendlich,
   für $N = n_2'$ wird der Fehler zu Null.

Für den Wert $\Xi_1 \Xi_2 \frac{1}{\Xi_2'}$ ist in den Tabellen die Bezeichnung E eingeführt.

Bisher haben wir angenommen, daß die Impulsachse eine unveränderliche Richtung habe. Dies ist natürlich nicht streng richtig. Wir können aber jetzt nach dem Superpositionsgesetz umgekehrt vorgehen und annehmen, der Kompaß werde in der Ost-West-Richtung festgehalten und könne nur Schwingungen in der Nord-Süd-Ebene ausführen.

Wir haben in dieser Ebene ebenfalls die Anordnung eines Kreiselpendels. Wir errechnen dann für die nun geltenden Schwingungszahlen den Fehler des Kompasses. Die Summe beider Fehler ergibt den wahren Fehler des Kompasses. Der Fehler des Kompasses verschwindet für ein beliebiges Erschütterungsmoment, wenn die Schwingungszahlen n_1, n_2 und n_2' gemessen in der Nord-Süd-Ebene und in der Ost-West-Ebene der Rose einander gleich sind. Während bei dem Magnetkompaß zur Vermeidung von Schlingerfehlern die Forderung erfüllt werden muß, daß die Trägheitsmomente der Rose gemessen um die Nord Süd- und um die Ost-West-Achse gleich sind, so haben wir beim Kreiselkompaß wegen der Schwingungen der Kreisel die oben angegebene kompliziertere Beziehung.

Wir haben bei den bisherigen Betrachtungen des Mehrkreiselkompasses die Konstruktion von Anschütz zugrunde gelegt. Die Rechnung ergibt aber, daß es völlig gleichgültig ist, wie die Kreisel angeordnet werden. Sie gilt also auch für jede andere Kreiselkompaß-Konstruktion mit mehreren Kreiseln. Zur Beseitigung des Schlingerfehlers wird nur verlangt, daß die Schwingungszahlen des Kompaßsystems in den verschiedenen Ebenen den oben abgeleiteten Bedingungen genügen.

In der Praxis reicht eine grobe Annäherung an diesen Idealfall aus, um die Fehler genügend klein zu machen. Bei dem Dreikreiselkompaß von Anschütz wird die Schwingungszeit um die Nord-Süd-Achse von einer Schwingung pro Sekunde auf eine Schwingung pro Minute, d. h. auf den 60fachen Wert des Einkreiselkompasses verlängert. Es hat sich gezeigt, daß dann die Fehler an Bord von Schiffen schon verschwindend klein werden.

In letzter Zeit hat auch Sperry nach dem Vorbild von Anschütz Kompasse mit mehreren Kreiseln gebaut. Da dem Verfasser über die Konstruktion Näheres nicht bekannt ist, so muß er von einer Fehlerberechnung hier absehen. Dagegen hat die deutsche Marine Vergleichsversuche zwischen einem Sperry-Zweikreiselkompaß und dem Anschütz-Dreikreiselkompaß gemacht und die Ergebnisse im Auszug in der Marinerundschau veröffentlicht. Beide Kompasse wurden nebeneinander an demselben Pendel aufgehängt und hin- und hergeschwungen. Jede Minute wurde die Differenz gegen den Meridian abgelesen.

Bei den Versuchen ergaben sich folgende Fehlweisungen der Kompasse:

	größte Deviationen:		Dauerdeviationen:	
	Sperry	Anschütz	Sperry	Anschütz
1. Versuch	$-1{,}6^0$	$+0{,}4^0$	$-1{,}4^0$	$+0{,}4^0$
2. »	$-6{,}0^0$	$-0{,}3^0$	$-4{,}0^0$	$-0{,}3^0$
3. »	$-9{,}0^0$	$-1{,}2^0$	etwa $-6{,}0^0$	unter -1^0

Man erkennt die weite Ueberlegenheit der Anschützschen Konstruktion. Wahrscheinlich ist das Kreiselpendel bei Sperry nicht so sorgfältig durchgebildet wie bei Anschütz.

4. Schlussfolgerung. Die bisherigen Berechnungen sind für das Verhältnis der Eigenschwingungszahlen des Kompasses zu der Schwingungszahl des Störungsmomentes durchgeführt worden. Es ist dies eine dimensionslose Größe, und die Ergebnisse haben hierdurch allgemeine Gültigkeit. Im allgemeinen ist jedoch nur die Schlingerzeit des Schiffes bekannt, und es muß hieraus erst das Verhältnis der Schwingungszahlen errechnet werden.

Um nun ein besseres Bild der Kompaßfehler zu erhalten, sind in Abb. 7 die Funktionen Ξ, Σ und E abhängig von der vollen Schwingungszeit des störenden Momentes aufgetragen. Die Kurven verlieren hierdurch allerdings ihre allgemeine Gültigkeit, und es sind der Zeichnung die Größen ausgeführter Kompasse zugrunde gelegt.

Die Ξ-Kurve des Anschütz-Einkreiselkompasses ist für eine Schwingungszeit des Systemes um die Nord-Süd-Achse = 2 Sekunden aufgestellt und einen Dämpfungsfaktor der Schwingungen = 0,5.

Der Σ-Kurve des Sperry-Kompasses ist eine Schwingungszeit der kardanischen Hängung von ebenfalls 2 Sekunden zugrunde gelegt und ein Dämpfungsfaktor = 0,5.

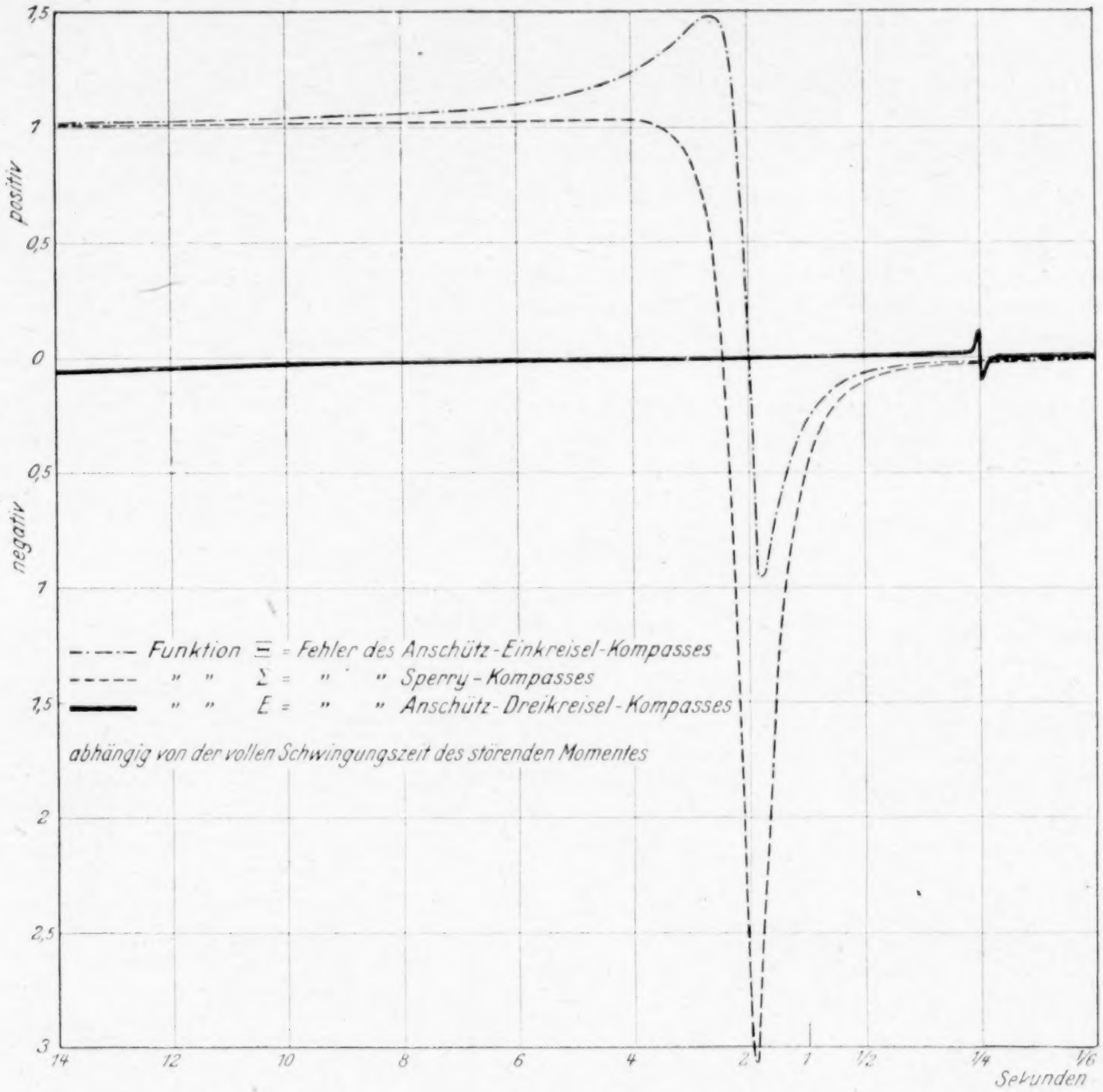


Abb 7

Bei der E-Kurve für den Anschütz-Dreikreiselkompaß ist die Grundschwingung = 60 Sekunden, die Nutationsschwingung = $^1/_4$ Sekunde und eine ganz geringe Dämpfung angenommen.

Der Abstand der Kurven von der Null-Linie ist dann an jeder Stelle direkt proportional dem Fehler des Kompasses. Demnach ist derjenige Kompaß der beste, dessen Kurve den geringsten Abstand von der Null-Linie auf dem ganzen in Betracht kommenden Gebiete der störenden Momente zeigt. Wir erkennen hier die weite Ueberlegenheit des Dreikreiselkompasses über alle anderen Konstruktionen. Zwischen 4 Sekunden und $^1/_2$ Sekunde volle Schwingungszeit läßt sich ein Abstand von der Null-Linie mit freiem Auge überhaupt nicht mehr feststellen und auch zwischen 12 und 4 Sekunden volle Schwingungsperiode bleibt die Differenz vielmals kleiner als beim Einkreiselkompaß. Nur bei $^1/_4$ Sekunde, d. h. wenn das Störungsmoment synchron wird mit der Nutationsschwingungszahl des Kompasses, ergeben sich etwas größere Differenzen, die aber ebenfalls noch weit unter dem größten Werte der Einkreiselkompasse liegen.

Es sei nun im folgenden an einem Beispiel gezeigt, wie man mit Hilfe der Kurven den Kompaßfehler ermitteln kann.

Es sei eine Schlingerperiode des Schiffes von 12 Sekunden gewählt. Dann erhalten wir für den Dreikreiselkompaß den Wert $E = -0{,}041$, während die Einkreiselkompasse ungefähr den Wert $+1{,}0$ ergeben. Wird also der Fehler der Einkreiselkompasse bei einer bestimmten Stärke des Seeganges 20^0, so wird bei dem gleichen Aufstellungsort und demselben Seegang der Fehler des Dreikreiselkompasses $\eqsim 0{,}041 \cdot 20^0 = 0{,}82^0$, und zwar geht dieser Fehler nach der entgegengesetzten Seite wie jener der Einkreiselkompasse.

Die Fehler der Kompasse für eine andere Schlingerperiode des Schiffes können in entsprechender Weise aus den Kurven abgelesen werden.

Obiges Zahlenbeispiel gibt den schlagendsten Beweis für die Ueberlegenheit des Dreikreiselkompasses über die Kompaßkonstruktionen mit nur einem Kreisel.

Aus den Kurven der Abb. 7 ersieht man, daß nur bei periodischen Anstößen von $\frac{4 \text{ Perioden}}{\text{Sekunde}}$ die Fehler des Dreikreiselkompasses etwas größer werden. Selbstverständlich ist es ausgeschlossen, daß Schlingerbewegungen des Schiffes oder deren Oberschwingungen mit dieser hohen Periodenzahl vorkommen können. Dagegen gibt es Maschinenerschütterungen und Vibrationen des Aufstellungsortes, die diese hohe Schwingungszahl besitzen. Aber auch ihre Einwirkung auf den Kompaß ist leicht zu beseitigen, indem man diesen federnd aufhängt, so daß Erschütterungen von dieser ungünstigen Periodenzahl nicht übertragen werden. Die Eigenschwingungszahl der Federn muß so gewählt werden, daß sie in ein günstiges Gebiet der E-Kurve fällt und demnach nur geringe Kompaßfehler verursachen kann. Dies kann aber leicht erreicht werden, da, wie man aus den Kurven sieht, das ungünstige Gebiet nur einen ganz kleinen Bereich umfaßt.

Bei den ganzen bisherigen Berechnungen ist angenommen, daß die Ebene des periodischen Anstoßes in bezug auf die Kompaßrose bekannt ist und der Winkel ε auf der Kompaßrose abgelesen werden kann. Dies ist an Bord eines Schiffes wohl meistens der Fall, denn steuert z. B. ein schlingerndes Schiff nach dem Kompaß einen bestimmten Kurs, so wird die Schlingerbewegung stets dieselbe Richtung zu der Kompaßrose behalten, da das Schiff um ebensoviel sich dreht, wie die Fehlerweisung des Kompasses beträgt. Erst wenn die Fehlerweisung groß wird und das Schiff sich soweit dreht, daß der Seegang zu dem Schiff anders läuft, werden die Bewegungen des Schiffes andere und damit auch die Einwirkungen der Schiffsbewegung auf den Kreiselkompaß. Hat man dagegen eine Versuchsanordnung im Laboratorium, so ist diese gewöhnlich unter einem bestimmten Winkel zum Meridian aufgebaut. Dann ist die Erschütterungsebene nicht fest zum Kompaß, sondern steht fest zur Erde, und die allgemeine Fehlergleichung für den Kreiselkompaß schreibt sich dann:

$$\sin \alpha_0 = -\left(\frac{\pi}{\tau_s} \frac{1}{U \cos q}\right)^2 \left(\frac{\gamma}{g}\right)^2 \sin 2 (\varepsilon_0 - \alpha_0) \; \Xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Dabei ist ε_0 der Winkel zwischen der Ebene des störenden Moments und dem Meridian des Ortes. Diese Gleichung läßt sich mit einfachen mathematischen Mitteln nicht lösen. Man fertigt sich am besten eine Rechentafel an. Häufig wird es der Fall sein, daß derartige Versuchseinrichtungen unter einem Winkel von 45^0 aufgestellt werden, um den größtmöglichsten Fehler zu bestimmen. In diesem speziellen Fall läßt sich Gl. (46) auflösen. Führen wir die Konstante C für alle Größen ein, die nicht von dem Winkel α_0 und ε_0 abhängen, so schreibt sich Gl. (46):

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha_0 &= C \sin (90^0 - 2\alpha_0) \\ &= C (1 - 2 \sin^2 \alpha_0) \\ &= -\frac{1}{4C} \pm \sqrt{\frac{1}{16 C^2} + 1/2} \end{aligned}\right\} \text{ für } \varepsilon_0 = 45^0.$$

Wie wir aus den Berechnungen ersehen haben, entstehen die Fehler durch das Schwanken der Richtung der Beschleunigung am Aufstellungsort. Es reicht also bei der Versuchseinrichtung nicht aus, den Kompaß auf einer Schaukel einfach zu kanten, sondern der Kompaß muß sich auch um eine bestimmte Strecke verschieben. Deshalb wurde im Laboratorium von Anschütz ein besonderer Schiebetisch aufgestellt, der in einstellbarer Periodenzahl den Kompaß um etwa 2 m hin und her bewegt. Auch wurden bei den Versuchen lange Pendel benutzt, auf die der Kompaß gestellt und dann hin und her geschwungen wurde.

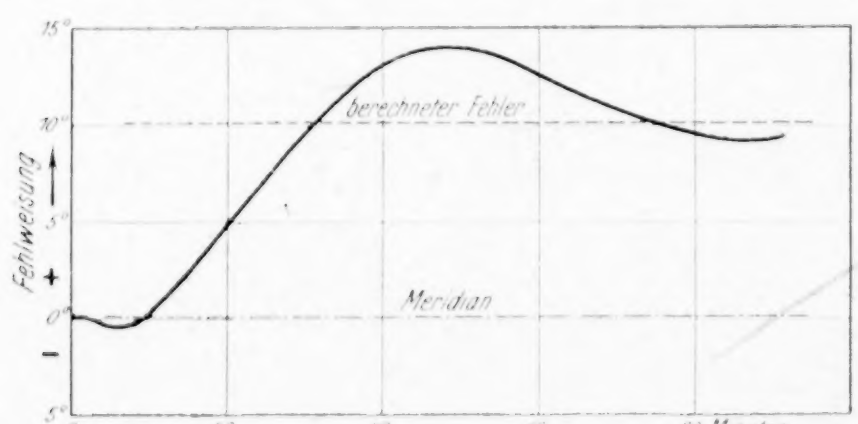


Abb. 8

Es sind zwei Schwingungskurven beigelegt, die bei den Laboratoriumsversuchen erhalten wurden. Abb. 8 zeigt den Fehler eines Einkreiselkompasses auf dem Schiebetisch bei einer vollen Schwingungsperiode von 12 Sekunden. Das Verhältnis von $\frac{\gamma}{g} = 0{,}0278$, der daraus berechnete Fehlerwinkel $\alpha_0 = -10{,}1^0$. Man ersieht aus der Gestalt der Schwingungskurve, daß die neue Gleichgewichtslage, welcher der Kompaß infolge der Wirkung der störenden Momente zustrebt, mit der errechneten Gleichgewichtslage sehr genau übereinstimmt.

Abb. 9 gibt die Schwingungskurve eines Dreikreiselkompasses an einem Pendel. Das Verhältnis von $\frac{\gamma}{g}$ war in diesem Falle 0,103, also ungefähr das 3,8fache des vorigen Versuches. Da der Kompaßfehler mit dem Quadrat dieses Verhältnisses zunimmt, so heißt dies, daß der Versuch etwa die 14fache Belastung gegenüber dem vorherbesprochenen Versuch darstellt. Trotzdem liegt die neue Gleichgewichtslage des Kompasses nur $2{,}8^0$ von dem wahren Meridian ab.

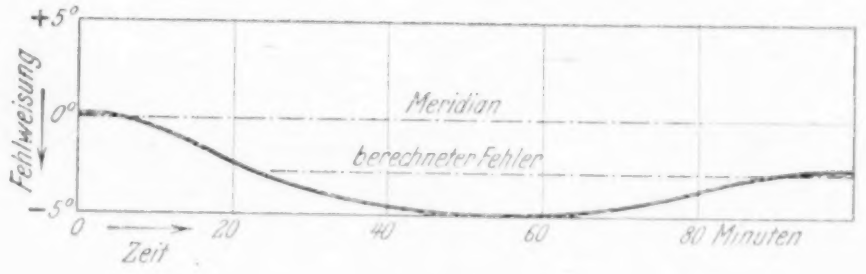


Abb. 9

Man sieht aus der aufgenommenen Kurve, daß Versuch und Rechnung sich ebenfalls gut decken, obwohl die Rechnung für den Mehrkreiselkompaß doch nur eine Näherungslösung darstellt, da die Reibungen vernachlässigt wurden. Der Fehler geht nach der anderen Seite wie beim Einkreiselkompaß; dies verlangt auch die Rechnung. Um ein Bild zu bekommen, welche Schiffsbewegungen notwendig sind, um derartige Beschleunigungen wie in dem letzten Versuch ausüben zu können, sei angenommen, daß der Kompaß 3 m über dem Drehpunkt des Schiffes steht. Dann muß das Schiff $\pm 38^0$ schlingern und zwar mit einer Periode von 6,1 Sekunden. Es entspricht dies einem mittleren Winkelweg von 12^0 in einer Sekunde. Es sind dies Bewegungen, wie sie nur bei allerschwerstem Seegang vorkommen dürften.

Dagegen mußten die Beschleunigungen bei dem Versuch mit dem Einkreiselkompaß viel geringer gehalten werden, damit der Fehler eine für die Messung günstige Größe nicht überschritt.

Auch ganz kurzen Erschütterungen wurde der Mehrkreiselkompaß ausgesetzt und dabei die Fehler bestimmt. Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch kam aber dabei nicht so klar zum Ausdruck, denn es ist sehr schwierig, die maximalen Beschleunigungen, die Periodenzahl und die Ebene der störenden Momente zu bestimmen, die bei Erschütterungen ausgeübt werden. Es treten z. B. Kreisschwingungen des zentrierenden Stiftes auf, welche die Beobachtungen stören. Auch ist bei der Rechnung angenommen, daß alle Körper starr seien und nur in ihren Drehpunkten beweglich. Dies stimmt natürlich bei ganz kurzen Erschütterungen nicht mehr. Auch der sehr stark gebaute Kompaß erfährt kleine Deformationen, welche Fehler von 1^0 bis 2^0 hervorrufen können. Da die nach den Formeln errechneten Fehler auch in dieser Größenordnung liegen, so läßt sich die Richtigkeit der Rechnung schwer prüfen.

Dagegen wurde eine große Anzahl von Versuchen mit pendelnd aufgehängten Kompassen gemacht, welche ganz verschieden konstruiert waren. Pendellänge und Pendelausschlag wurden in weiten Grenzen verändert. Dabei ergab sich stets gute Uebereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung, da Ebene, Schwingungszahl und Größe der störenden Momente bei den Versuchen genau bestimmt werden konnten.

Aber nicht nur im Laboratorium, sondern auch an Bord von Schiffen wurden Vergleichsversuche angestellt. Auf dem großen Kreuzer der deutschen Marine S. M. S. »Moltke« wurden ein Anschütz-Einkreiselkompaß und ein nach vorstehenden Berechnungen gebauter Anschütz-Dreikreiselkompaß unmittelbar nebeneinander aufgestellt. Dabei wurden bei schwerem Seegang in der Atlantik die in der folgenden Tafel zusammengestellten Fehlweisungen beobachtet (Plus ist der Ausschlag der Rose nach rechts, minus nach links):

17. Juni 1912.

Zeit	Kurs	Einkreisel	Dreikreisel	Zeit	Kurs	Einkreisel	Dreikreisel
5^{40} V	65^0	$5{,}9^0$	$0{,}2^0$	10^{40} V	65^0	$4{,}9^0$	$0{,}8^0$
6^{00} »	»	$8{,}2^0$	$-0{,}3^0$	11^{00} »	»	$4{,}1^0$	$1{,}0^0$
6^{20} »	»	$10{,}2^0$	$0{,}0^0$	11^{20} »	»	$4{,}8^0$	$1{,}0^0$
6^{40} »	»	$10{,}8^0$	$-0{,}3^0$	11^{40} »	171^0	$1{,}8^0$	$0{,}3^0$
7^{00} »	»	$7{,}3^0$	$0{,}9^0$	12^{00} M	65^0	$-3{,}6^0$	$0{,}2^0$
7^{20} »	»	$5{,}7^0$	$1{,}3^0$	12^{20} N	»	$4{,}3^0$	$1{,}8^0$
7^{40} »	»	$9{,}7^0$	$0{,}2^0$	12^{40} »	»	$7{,}0^0$	$1{,}5^0$
8^{00} »	»	$7{,}9^0$	$0{,}0^0$	1^{00} »	»	$4{,}1^0$	$1{,}9^0$

18. Juni 1912.

9^{10} V	65^0	$8{,}6^0$	$0{,}6^0$	10^{30} V	65^0	$8{,}9^0$	$0{,}2^0$
9^{20} »	»	$12{,}1^0$	$0{,}0^0$	10^{40} »	»	$10{,}1^0$	$0{,}0^0$
9^{30} »	»	$12{,}3^0$	$-0{,}5^0$	10^{50} »	»	$11{,}0^0$	$-0{,}1^0$
9^{40} »	42^0	$13{,}0^0$	$-0{,}3^0$	4^{20} N	»	$5{,}0^0$	$0{,}8^0$
9^{50} »	»	$14{,}0^0$	$-0{,}2^0$	4^{40} »	»	$7{,}0^0$	$1{,}0^0$
10^{00} »	65^0	$11{,}5^0$	$0{,}2^0$	5^{00} »	»	$10{,}0^0$	$0{,}2^0$
10^{10} »	»	$9{,}1^0$	$0{,}2^0$	5^{20} »	»	$12{,}2^0$	$0{,}0^0$
10^{20} »	»	$8{,}0^0$	$0{,}4^0$				

Die Ausschläge des Dreikreiselkompasses sind durchweg sehr klein und fallen, außer denen vom Nachmittag des 17., in die Beobachtungsunsicherheit. Die Ausschläge des Einkreiselkompasses gehen bis zu 14^0 und sind auf dem Kurs 65^0 immer positiv. Der Kurswechsel in den zweiten Quadranten am 17. um 11^{35} ruft ein Umschlagen des Vorzeichens der Ausschläge hervor, und der Zwischenstrichkurs vom 18. um 9^{35} bis 9^{52} erhöht den von 9^{20} bis 10^{00} auf Kurs 65^0 vorhandenen Ausschlag von 12^0 noch um 1^0 bis 2^0. Beides fordert die Theorie, und auch die Richtung des Kompaßfehlers entspricht ihr.

Die Fehler des Dreikreiselkompasses sind zu klein und die Beobachtung zu ungenau, um sichere Schlüsse ziehen zu können. Doch scheinen bei den großen positiven Fehlern des Einkreiselkompasses am 17. um 6^{40} und am 18. um 9^{30} bis 9^{50} und 10^{50} die Abweichungen des Dreikreiselkompasses negativ zu sein. Dies würde sich jedenfalls mit der Theorie decken. Diese Prüfungen der Deutschen Kriegsmarine beweisen den großen Fortschritt, den die Konstruktion des Dreikreiselkompasses gegenüber dem Einkreiselkompaß für die Schiffahrt bedeutet. 123

Über eine Aufgabe der malerischen Perspektive des Leone Battista Alberti.

Von **FR. SCHILLING** in Danzig-Langfuhr.

Die vorliegende anspruchslose Betrachtung einer einfachen, historisch interessanten geometrischen Aufgabe liefert ein lehrreiches Beispiel dafür, wie gewisse Sätze der Analysis (Summenformel der endlichen oder unendlichen geometrischen Reihe, Unterschied der gewöhnlichen und natürlichen Logarithmen, Lösung transzendenter Gleichungen, Maxima und Minima von Funktionen, unbestimmte Formen von Funktionen) in innige Verbindung treten mit geometrischen Tatsachen und von geometrischem Zeichnen begleiteter Anschauung (höhere Kurven in der analytischen Geometrie, Asymptoten, Wendepunkte, anschauliche Grenzbetrachtungen). Es handelt sich um die bekannte Frage, wie man eine quadratische »Fußbodentäfelung« und zwar in Frontstellung von dem Augenpunkt O aus in die perspektivische Bildebene übertragen kann. Um diese Frage dreht sich ja die ganze Entwicklung der Perspektive zur Zeit der Renaissance jenseits und diesseits der Alpen [1]). Die räumlichen Verhältnisse seien durch die Abb. 1 veranschaulicht, die auch die benutzten Bezeichnungen angibt. Als Ausgangspunkt

[1]) Vergl. im Einzelnen dazu z. B. Hans Schuritz, Die Perspektive in der Kunst Dürers, Frankfurt a. M. 1919. G. Wolff, Mathematik und Malerei, Math. Bibliothek Bd. 20, 21, Leipzig 1916, S. 49.

dient uns eine Stelle aus der 1435 zu Florenz vollendeten Schrift des Leone Battista Alberti (1402 bis 1472): »Drei Bücher über die Malerei«, die wir im folgenden vollständig anführen. Wir knüpfen daran die ausführliche Darstellung der Lösung, wie sie dem heutigen Stand der Geometrie entspricht, wobei wir die erwähnten didaktischen Gesichtspunkte zur Geltung zu bringen hoffen.

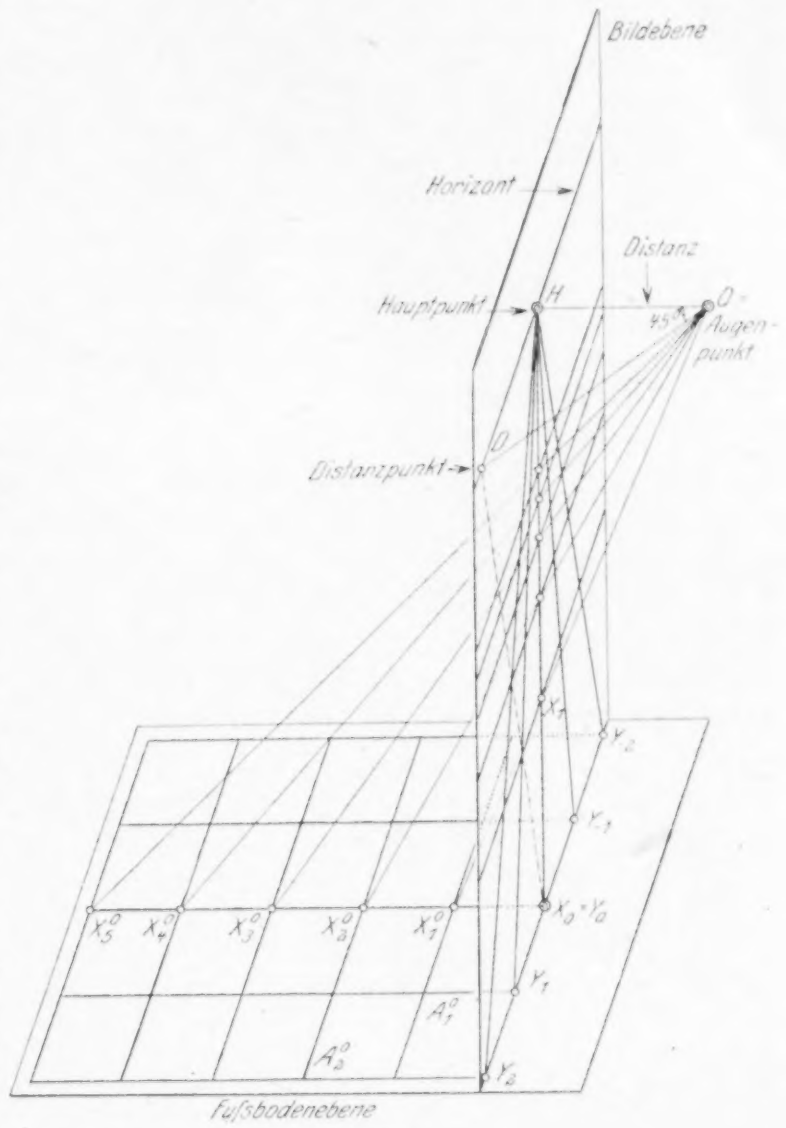


Abb. 1

1. Das Verfahren des Leone Battista Alberti. Es heißt in der genannten Schrift[1]) von Alberti: »Ich werde angeben, wie ich es mache, wenn ich selbst male. Vorerst beschreibe ich auf die Bildfläche ein rechtwinkliges Viereck von beliebiger Größe, welches ich mir wie ein geöffnetes Fenster vorstelle, wodurch ich das erblicke, was hier gemalt werden soll. Dann bestimme ich mir nach Belieben die Größe des Menschen in meinem Bilde. Hierauf teile ich mir dieses Höhenmaß des Menschen in drei Teile, welche Teile proportional sind zu jenem Maß, welches man Elle nennt, da man findet, daß die Größe eines normalen Menschen ungefähr 3 Ellen (Armlängen) beträgt. Mit diesem Maße teile ich die Basis des Viereckes in so viele Teile als dies möglich, und eben diese Linie (d. h. die Basis des Viereckes) ist dann jeder nächsten dazu parallel gezogenen Querdimension proportioniert. Innerhalb dieses Viereckes bestimme ich dann nach dem Augenschein einen festen Punkt, welcher jene Stelle einnimmt, die der Zentralstrahl trifft, weshalb ich ihn Zentralpunkt (Hauptpunkt) nenne. Gut wird es sein, wenn die Distanz zwischen diesem Punkt und der Basis nicht mehr beträgt als die Höhe des Menschen, welcher hier gemalt werden soll, da dann der Beschauer sowohl, wie die gesehenen gemalten Gegenstände sich auf einem und demselben Plane zu befinden scheinen. Ist der Zentralpunkt bestimmt, wie ich angab, so ziehe ich dann von ihm aus gerade Linien zu allen Teilungspunkten der Basis des Viereckes, welche Linien mir zeigen, in welcher Weise jede Querdimension gleichsam ins Unbegrenzte hinaus fortlaufend sich verändere (verjünge).

Nun könnte es einige geben, welche innerhalb des Viereckes eine von der Basis äquidistante Querlinie zögen und den Zwischenraum dieser zwei Linien in drei Teile teilen; nachdem sie dann zwei von diesen genommen, zögen sie in solchem Abstande neuerdings eine Aequidistante zur Basis, dann noch eine und wieder eine, immer nach der Regel verfahrend, daß jener in drei Teile geteilte Raum, welcher zwischen der ersten und zweiten Aequidistante sich befindet, dem zwischen der zweiten und dritten immer um einen Teil voraus sei; so fortfahrend würde es geschehen, daß — um mit den Mathematikern zu sprechen — jeder vorausgehende Raum den nächst folgenden um die Hälfte von dessen Größe überragte. Diese nun, die also vorgehen, würden meiner Meinung nach irren, obgleich sie auf richtigem Wege zu sein vermeinen; indem

---

[1]) Ich folge hier der Uebersetzung von H. Janitschek in seiner Schrift: Leone Battista Albertis kleinere kunsttheoretische Schriften, im Originaltext herausgegeben, übersetzt, erläutert und mit einer Einleitung und Exkursen versehen, in den Quellenschriften für Kunstgeschichte von R. Eitelberger v. Edelberg, Bd. XI, Wien 1877, S. 78 bis 82.

Vergl. auch Steigmüller, Kannte Leone Battista Alberti den Distanzpunkt? Repertorium für Kunstwissenschaft, Bd. XIV, 1891, S. 301 bis 304, sowie E. Panofsky, Das perspekivische Verfahren Leone Battista Albertis, Kunstchronik, Neue Folge, XXVI. Jahrgang 1914/15, S. 505 bis 516.

sie nämlich die erste Linie (sc. die zur Basis erste Parallele) auf das Ungefähr hinzogen, nicht aber dabei einen bestimmten Augenpunkt (Punkt an der Spitze der Sehpyramide) im Gedanken hatten, so erwachsen nun daher ihrem Bilde nicht geringe Irrtümer[1]). Dem beizugesellen ist das fehlerhafte Vorgehen derer, welche den Abstand des Zentralpunktes von der Basis größer oder kleiner annehmen, als die Größe des (auf dem Bilde) gemalten Menschen.

Wisse nämlich, daß keine Malerei der Wirklichkeit entsprechen wird, wofern nicht eine bestimmte Distanz vom Beschauer durchgehalten ist. Die Gründe für dies jedoch werde ich angeben, wenn ich je dazu kommen sollte, über jene von mir gemachten Demonstrationen zu schreiben, die von meinen Freunden wie Wunder angestaunt wurden. Schon vieles, was ich hier sagte, gehörte auf jenes Gebiet; ich kehre also zu meinem Gegenstande zurück. Ich fand also dies als die beste Verfahrungsweise, ganz so vorzugehen, wie ich es oben beschrieb, den Zentralpunkt zu fixieren und dann von da aus Linien zu Teilpunkten der Basis des Viereckes zu ziehen.

Was aber die Aufeinanderfolge der Querlinien betrifft, so schlage ich folgenden Weg ein. Ich nehme einen kleinen Flächenraum, auf welchem ich eine gerade Linie beschreibe, die ich in ebenso viele Teile teile, als die Basis des Viereckes Teile enthält. Ueber dieser Geraden fixiere ich mir dann einen Punkt, der von derselben ebenso hoch absteht als der Zentralpunkt von der Basis des Viereckes, von welchem Punkte aus ich mir dann Gerade zu den Teilungspunkten der erstgenannten Linie ziehe. Hierauf stelle ich die Entfernung fest, in welcher der gemalte Gegenstand (die Malerei) dem Auge erscheinen soll, und ziehe von da aus eine — wie die Mathematiker sie nennen — lotrechte Linie, die, welche Linie immer sie treffen mag, schneidet. Jene gerade Linie nenne ich »lotrecht«, welche, wenn sie sich mit einer anderen Geraden schneidet, mit dieser nach rechts und links rechte Winkel bildet. Die auf solche Weise lotrecht gezogene Linie wird mir in ihren Durchschnittspunkten die Aufeinanderfolge sämtlicher Transversalen (Querdimensionen) geben. Auf diese Weise werde ich sämtliche Parallelogramme, d. h. die Ellenfelder des Estrichs auf dem Bilde beschrieben erhalten. Ob dies in richtiger Weise geschah, werde ich daran erkennen, daß in solchem Falle eine und dieselbe Gerade den Durchmesser mehrerer auf dem Bilde gezeichneten Felder bilden wird.«

Alberti sagt dann später (l. c. S. 84) noch: »Diese Anleitung ist derart, daß ich einerseits wegen der Neuheit des Gegenstandes, andererseits wegen der Kürze der Erörterung daran zweifele, daß sie leicht von dem Leser verstanden werden wird«.

Ich möchte annehmen, daß Alberti deswegen sich nicht völlig klar ausgedrückt hat, weil er seine perspektivische Kunst noch als Geheimbesitz bewahren und nur soviel mitteilen wollte, um sich die Priorität der Entdeckung zu sichern. War doch z. B. in den

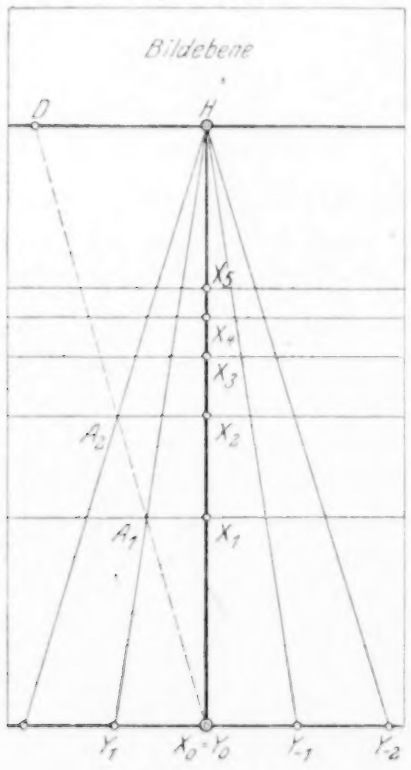


Abb. 2

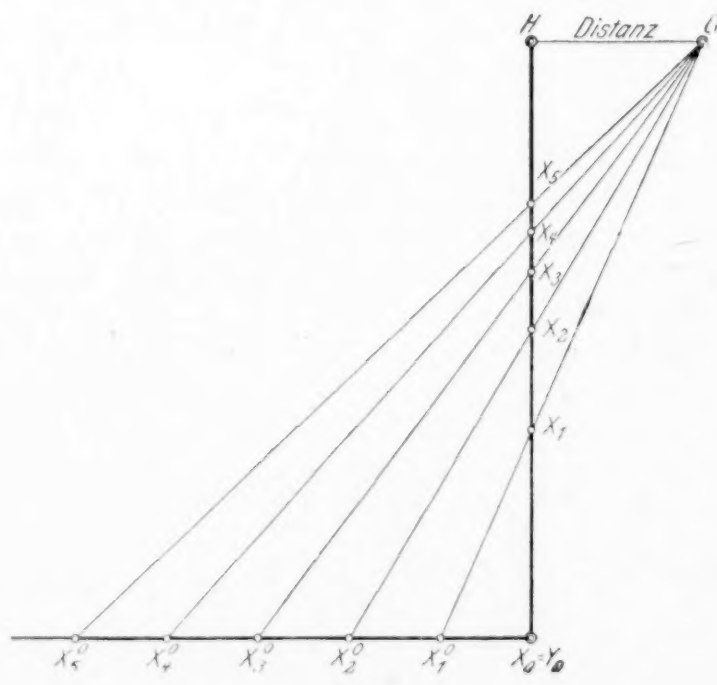


Abb. 3

[1]) Der hier in der Uebersetzung gemachte Zusatz: »obgleich sie im weiteren einer richtigen Regel folgen« steht nicht im Text.

mittelalterlichen »Bauhütten« auch die Kunst des Steinschnitts, die Stereotomie, ein ängstlich gehütetes Geheimnis.

Man kann nun die Albertische Beschreibung der genauen von ihm empfohlenen Konstruktion auf Grund anderer sehr bald danach erschienener Schriften[1]) wohl sicher wie folgt auslegen:

In einem Rechteck (Abb. 2), das die Bildebene vorstellt, sind zunächst der Hauptpunkt H (Zentralpunkt) und auf der Grundlinie die Teilpunkte Y_i anzunehmen und die »Tiefenlinien« $H\,Y_i$ zu ziehen, wie dies auch die Abb. 1 angibt. In einer Hilfsfigur (Abb. 3) ist dann weiter zu zeichnen, was in der Ebene $OHX_0\,X_5$ der Abb. 1 liegt. Hierdurch sind dann die Punkte X_n und damit die Querlinien in der Abb. 2 festgelegt. Als ein Beispiel für eine solche quadratische Bodentäfelung aus der Zeit der Frührenaissance sei aus der großen Fülle etwa »die Verkündigung«, der eine Flügel des Genter Altars, von Hubert und Jan van Eyck (um 1400) erwähnt.

2. Analytische Untersuchung des Verfahrens. Nun wollen wir zu der eigentlich beabsichtigten Betrachtung übergehen, die an die von Alberti als unrichtig erkannte Regel anknüpft. Hiernach würde nach dem Zeichnen der Grundlinie $Y_0\,Y_i$ und des Hauptpunktes H, wie in der Abb. 2, die erste Querlinie beliebig anzunehmen, jede folgende aber in einem Abstande von der vorhergehenden zu ziehen sein, der gleich $^2/_3$ des vorhergehenden Abstandes ist. In der nebenstehenden Abb. 4 sei nun demgemäß eine solche Zeichnung ausgeführt. Die Teilstrekken $Y_{n-1}\,Y_n$ auf der Grundlinie seien gleich s gesetzt, wobei insbesondere diese Strecke s als Einheitsstrecke gewählt werden kann. Der Abstand $X_0\,X_1$ der ersten Querlinie von der Grundlinie sei gleich a gewählt.

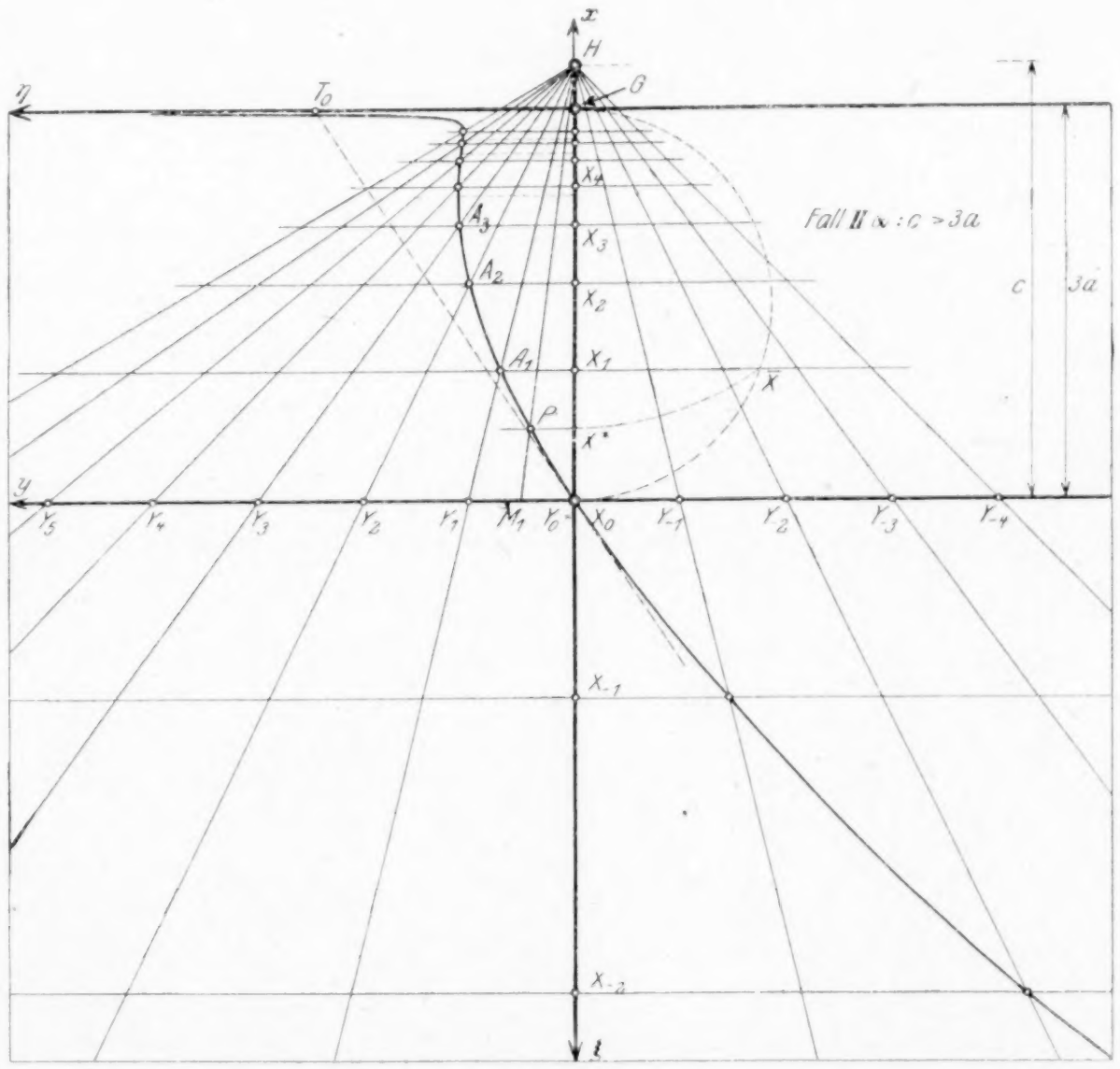


Abb. 4

(In der unverkleinerten Abb. 4, wie auch in den späteren Abb. 5, 6 und 7, ist stets $s = 1{,}2$ cm und $a = 1{,}5$ cm gewählt). Die aufeinander folgenden Abstände $X_{n-1}\,X_n$ der Teilpunkte X_n auf der Geraden X_0H sind also: a, $\left(\frac{2}{3}\right)a$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2 a$ . . . .[2]). Wir wollen weiterhin die Geraden $\overrightarrow{X_0H}$ und $\overrightarrow{Y_0\,Y_i}$ als x, y-Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit

---

[1]) Man vergl. z. B. Piero dei Franceschi (Petrus Pictor Burgensis) (gest. 1492), de prospectiva pingendi, mit deutscher Uebersetzung veröffentlicht von C. Winterberg, Straßburg 1899, S. LXXXVII.

[2]) Es sei noch darauf hingewiesen, daß man in dem Gesetz für die Aufeinanderfolge der Abstände anstatt $\frac{2}{3}$ auch einmal einen anderen echten Bruch, z. B. $\frac{1}{2}$, wählen könnte.

dem Anfangspunkt $X_0 = Y_0$ ansehen. Es ergibt sich nun als Summe $\bar{x}$ aller Abstände auf der x-Achse:

$$\bar{x} = \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) a = 3a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die ganze »Tiefe $\bar{x}$«, die durch die Gesamtheit aller Querlinien erreicht wird, ist gleich $3a$.

Hieraus folgt sofort, daß es von vornherein falsch wäre, die Entfernung $X_0 H$, die, stets als endlich und von 0 verschieden vorausgesetzt, in der Folge mit c bezeichnet sei, von der Strecke $3a$ verschieden zu wählen, da dann eben der durch H gehende Horizont (vergl. Abb. 1) von dem durch die Querlinien erreichten Horizont verschieden wäre. Alberti hat weiter (l. c. S. 82) als Regel, an der die Richtigkeit seiner anderen perspektivischen Konstruktion erkannt wird, angegeben, daß »dieselbe Gerade den Durchmesser (Diagonale) mehrerer auf dem Bilde gezeichneter Felder bilden wird« (vergl. die Gerade $X_0 D$ der Abb. 1 und 2, wo D den einen sogenannten »Distanzpunkt« wegen $DH = OH$ bedeutet). Wir wollen nun weiter sehen, wie diese Verhältnisse sich bei der unrichtigen Konstruktion gestalten. Wir betrachten zunächst die Aufeinanderfolge der Punkte A_n in der Abb. 4, d. h. der Schnittpunkte der Geradenpaare, die aus der Geraden $Y_n H$ und der Querlinie für X_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$) bestehen; hierbei denken wir auch auf der negativen Hälfte der x-Achse die Punkte $X_{-1}, X_{-2} \ldots$ konstruiert, wo dem früheren Gesetz entsprechend die aufeinander folgenden Abstände $X_{n-1} X_n$ (für $n = 0, -1, -2 \ldots$) gleich

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} a = \frac{3}{2} a, \left(\frac{3}{2}\right)^2 a, \left(\frac{3}{2}\right)^3 a \ldots\ldots$$

sind. Es gilt nun offenbar (für $n \leqq 0$):

$$X_n H : X_0 H = X_n A_n : Y_0 Y_n$$

oder, wenn $X_0 H = c$ ($c \neq 0$) und die Koordinaten der Punkte A_n mit x_n, y_n bezeichnet sind.

$$(c - x_n) : c = y_n : n s, \quad \text{oder} \quad y_n = n s \left(1 - \frac{x_n}{c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nun ist für $n > 0$

$$x_n = \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] a \text{ oder } x_n = 3a \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \quad . \quad (3)$$

$$n = \frac{\lg \frac{3a - x_n}{3a}}{\lg \frac{2}{3}} \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3').$$

Die beiden Logarithmen können hier ersichtlich als solche mit der Basis 10 oder mit der Basis e angesehen werden.

Analog ist für $n < 0$

$$-x_n = \left[\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}\right] a,$$

d. h., es gelten auch hier unverändert die Gl. (3) und (3'). Aus den Gl. (2) und (3') folgt endlich nach Elimination des Parameters n:

$$y_n = s \left(1 - \frac{x_n}{c}\right)^{\frac{\lg \frac{3a - x_n}{3a}}{\lg \frac{2}{3}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wir lassen nun in der letzten Gleichung den Index n fort, indem wir x_n nicht mehr auf die Werte beschränken, die durch die Gl. (3) für positive oder negative ganze Zahlen n sich ergeben, sondern beliebig veränderlich sein lassen. Dann stellt die Gleichung in der neuen Form:

$$y = s \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{\frac{\lg \frac{3a - x}{3a}}{\lg \frac{2}{3}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

eine bestimmte Kurve dar, die wir als eine »Diagonalkurve« bezeichnen wollen. Diese Kurve hat für unseren Zweck die Eigenschaft, die oben definierten Punkte A_n

zu enthalten[1]). Wir können die Kurve (5) also an die Stelle der Geraden, der gemeinsamen Diagonalen, treten lassen, die die Punkte A_n in der genauen Figur der Abb. 2 verbindet und, wie wir sahen, den Horizont im einen Distanzpunkt D schneidet.

Wir wollen nun die Diagonalkurve (5) näher diskutieren. Wir führen dazu am besten ein neues rechtwinkliges ξ, η-Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt G oder $x = 3a$, $y = 0$ ein (vergl. die Abb. 4) durch die Transformationen:

$$\xi = 3a - x, \quad \eta = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\,a\,b).$$

Die Gleichung (5) lautet dann einfacher:

$$\eta = s\,\frac{\xi + (c - 3a)}{c}\,\frac{\lg\dfrac{\xi}{3a}}{\lg\dfrac{2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Wir könnten diese Gleichung in eine noch einfachere Form überführen, wenn wir setzten:

$$\bar{\xi} = \frac{s}{3a}\,\xi, \quad \bar{\eta} = \frac{c}{3a}\lg\frac{2}{3}\,\eta \quad .. \quad (8), \qquad C = \left(\frac{c}{3a} - 1\right) s \quad .. \quad (9).$$

Wir erhielten dann, insbesondere bei Bevorzugung von natürlichen Logarithmen, die stets mit ln bezeichnet seien:

$$\bar{\eta} = (\bar{\xi} + C)\ln\frac{\bar{\xi}}{s} \quad .. \quad (10), \qquad e^{\bar{\eta}} = \bar{\xi}^{\bar{\xi}+C} \text{ für } s = 1 \quad .. \quad (10').$$

Die Transformationen (8) stellen ja bei zusammenfallenden Achsen der ξ, η- und $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ Koordinatensysteme eine einfache »Affinität« zwischen den Punkten (ξ, η) und $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ dar; sie gestatten bei gegebenen Strecken s, c und a leicht zu jedem Punkte (ξ, η) den entsprechenden Punkt $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ oder umgekehrt zu berechnen oder auch (mit Zirkel und Lineal) zu zeichnen, wenn nur etwa der dem Punkte $\xi = 1$, $\eta = 1$ entsprechende Punkt $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ gezeichnet vorliegt, d. h. wenn noch die Strecke $k = -\lg\frac{2}{3} = 0{,}405554\ldots\ldots$ gegeben ist. Doch wollen wir, insbesondere unserer Anwendung zu Liebe, es doch vorziehen, weiterhin die Diagonalkurve in der ursprünglichen Gleichungsform (7) zu diskutieren. Wir sind dann auch in der Lage, wenn nur die Strecken s, c und a festgelegt sind, mit Zirkel und Lineal die Punkte A_n der Kurve zu konstruieren.

3. Der Verlauf der Diagonalkurve. Wir haben die beiden Fälle zu unterscheiden: I. $c = 3a$, Abb. 5. II. $c \neq 3a$, Abb. 4, 6, 7.

Der **erste Fall c = 3a** verdient, wie wir wissen, besonderes Interesse deswegen, weil der Punkt H dann wenigstens auf dem erreichten Horizont, d. h. der η-Achse, liegt. Die Gl. (7) lautet jetzt:

$$\eta = s\,\frac{\xi}{c}\,\frac{\lg\dfrac{\xi}{c}}{\lg\dfrac{2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

---

[1]) Natürlich könnte man an Stelle dieser in der angegebenen Weise sehr einfach erhaltenen transzendenten Kurve ja auch noch andere Kurven mit der gleichen Eigenschaft aufzustellen suchen. Man könnte zu dem Zweck etwa eine beliebige Funktion $y = g(x)$ bestimmen, für welche die Stellen x_i der x-Achse (Abb. 4) Nullstellen sind. Dann würde auch die Funktion $y = f(x) + g(x)$, wo $f(x)$ die Funktion der Gl. (5) sei, eine Kurve der gewünschten Eigenschaft darstellen. Man betrachte in dieser Hinsicht z. B. die Funktion

$$\bar{y} = g(x) = \sin\left[\pi\,\frac{\lg\dfrac{3a - x}{3a}}{\lg\dfrac{2}{3}}\right]$$

oder auch

$$\bar{y} = g(x) = (A + Bx)\sin\left[\pi\,\frac{\lg\dfrac{3a - x}{3a}}{\lg\dfrac{2}{3}}\right],$$

wo A und B konstante Zahlen sind.

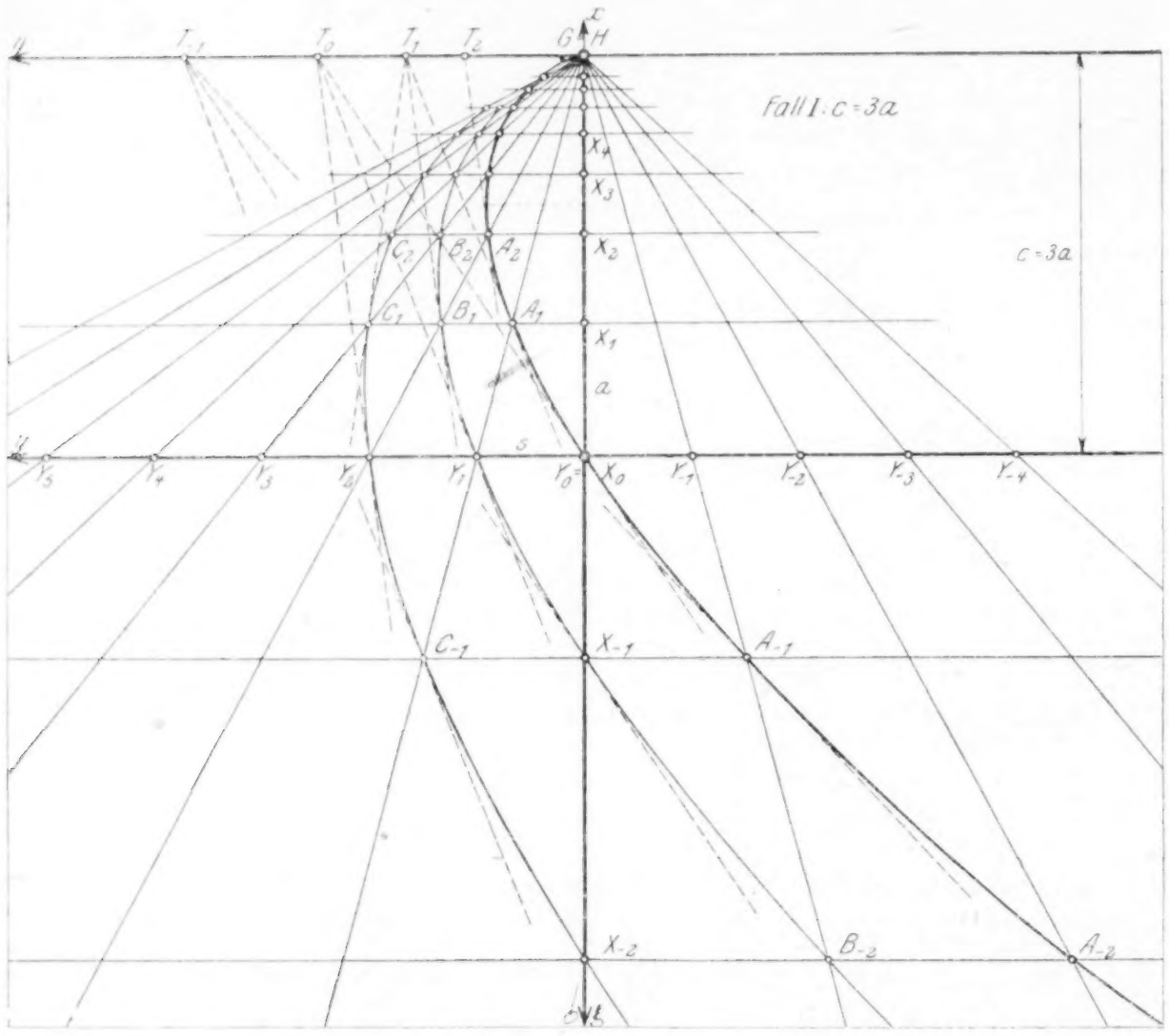


Abb. 5

Die nachfolgenden Resultate seien sogleich durch Abb. 5 veranschaulicht. Ersichtlich gehört zu jedem Werte $\xi > 0$ nur ein Wert η, während für $\xi < 0$ sich kein reeller Wert η ergibt. Für $\xi = 0$ nimmt die rechte Seite den zunächst unbestimmten Wert $0 \cdot \infty$ an. Wir haben daher die η-Achse als der vollständigen Kurve mit der Gl. (11) zugehörig anzusehen. Wir wollen jedoch den Grenzwert $\lim \eta$ für $\lim \xi = +0$ ausrechnen. Nach der bekannten Regel der Differentialrechnung für die Bestimmung von unbestimmten Formen $\frac{\infty}{\infty}$ ergibt sich:

$$\lim_{\xi=+0} (\xi \ln \xi) = \lim \frac{\ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \lim (-\xi) = -0, \qquad \lim_{\xi=+0} \eta = +0.$$

Der Kurvenzug für positive Werte ξ endigt im Koordinatenanfangspunkt.

Sodann ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \left[1 + \ln \frac{\xi}{c}\right], \qquad \lim_{\xi=+0} \frac{d\eta}{d\xi} = +\infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die Kurve berührt die η-Achse im Koordinatenanfangspunkt.

Ferner ist die Ordinate $\eta = 0$ noch für $\xi = c$, während die Ordinate η für $0 < \xi < c$ positiv, für $\xi > c$ negativ ist. Für $\xi = c$ ist weiter:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi=c} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}}.$$

Demnach lautet die Gleichung der Tangente im Punkte $(c, 0)$ oder $X_0 = Y_0$:

$$\eta = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} (\xi - c).$$

Der Schnittpunkt T_0 der Tangente im Punkte X_0 oder $(c, 0)$ mit der Ordinatenlinie hat die Ordinate $\eta = -\frac{s}{\ln \frac{2}{3}}$ (= 2,959 cm in Abb. 5).

Die Kurve hat endlich ein Maximum der Ordinate, für $\xi_1 = \frac{c}{e}$, $\eta_1 = -\frac{s}{c \ln \frac{2}{3}}$, wo e hier wie sonst die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. (Im Beispiel der Abb. 5, woselbst die Ordinate des Maximums gestrichelt eingezeichnet ist, ist $\xi_1 = 1{,}655$ cm, $\eta_1 = 1{,}089$ cm).

In diesem Falle $c = 3a$ wollen wir auch die übrigen Diagonalkurven kurz betrachten, etwa die vom Punkte Y_1 aus durch die Punkte $B_1, B_2 \ldots$ der Abb. 5 gehende Diagonalkurve. Es ist leicht zu sehen, daß alle übrigen »linksgerichteten« Diagonalkurven zu der durch die Gleichung (11) dargestellten, also vom Punkte $X_0 = Y_0$ ausgehenden, in bezug auf den Punkt $G = H$ ähnlich und ähnlich gelegen sind. Die Diagonalkurve $Y_1 B_1 \ldots$ z. B. ist analog der Gleichung (11) durch die Gleichung:

$$\eta = s_1 \frac{\xi}{c_1} \frac{\lg \frac{\xi}{c_1}}{\lg \frac{2}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11a),$$

mit $s_1 = \frac{3}{2} s$, $c_1 = \frac{3}{2} c$ bestimmt. Die Tangenten aller Diagonalkurven in den Punkten X_i sind demnach einander parallel. Die Diagonalkurve $Y_1 B_1 \ldots$ ist übrigens zur Diagonalkurve $Y_0 A_1 \ldots$ auch perspektiv-affin mit der η-Achse als Affinitätsachse und Y_1, Y_0 als entsprechenden Punkten, und das Analoge gilt von den anderen Diagonalkurven. Die Tangenten aller Diagonalkurven in den Punkten Y_i gehen demnach durch denselben Punkt T_0 oder $\xi_0 = 0$, $\eta = -\frac{s}{\ln \frac{2}{3}}$. (Aus der Tangente der Diagonalkurve im Punkte $X_0 = Y_0$ mit dem Schnittpunkt T_0 auf der Ordinatenachse ergeben sich also ohne weiteres die parallelen Tangenten der anderen Diagonalkurven in den Punkten $X_1, X_2 \ldots$ und den Punkten $X_{-1}, X_{-2} \ldots$ und damit auch wegen desselben bezüglichen Schnittpunktes auf der Ordinatenachse die Tangenten der Diagonalkurve bezw. in den Punkten $A_1, A_2 \ldots$ und den Punkten $A_{-1}, A_{-2} \ldots$ Er ist z. B. in der Abb. 5 demgemäß $A_1 T_1 \parallel Y_1 T_0$, $A_2 T_2 \parallel Y_2 T_0$ und $A_{-1} T_{-1} \parallel Y_{-1} T_0$.)

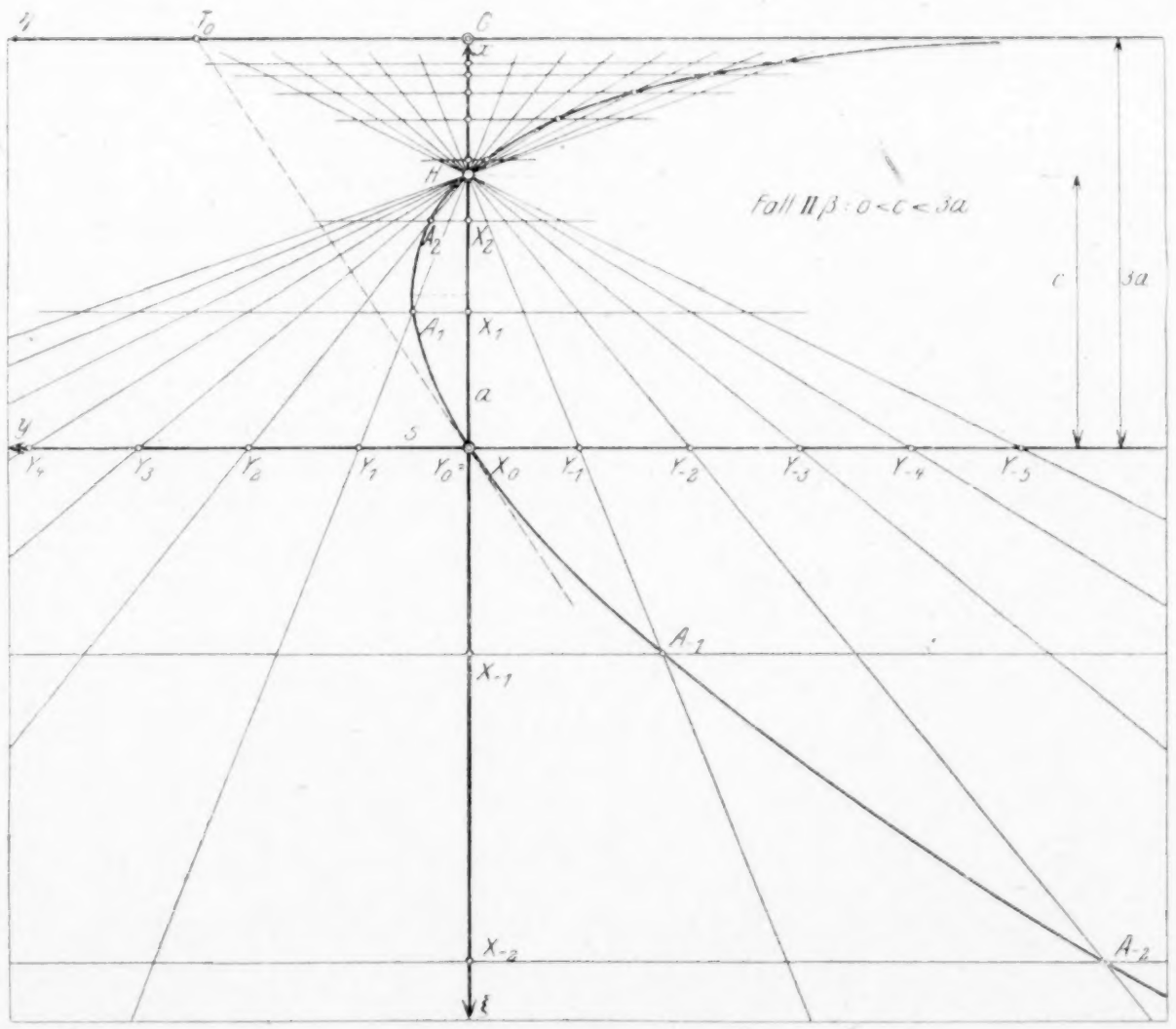


Abb. 6

Wir wenden uns nun zu dem **zweiten Fall** $c \neq a$ und unterscheiden, indem wir die Strecke $3a$ als ξ-Koordinate des Punktes $X_0 = Y_0$ stets als positiv ansehen und unter der Strecke c genauer die Strecke $\overrightarrow{HX_0}$ der ξ-Achse verstehen, sogleich die folgenden Unterfälle:

$\alpha)$ $c > 3a$, Abb. 4, $\beta)$ $0 < c < 3a$, Abb. 6, $\gamma)$ $c < 0$, Abb. 7.

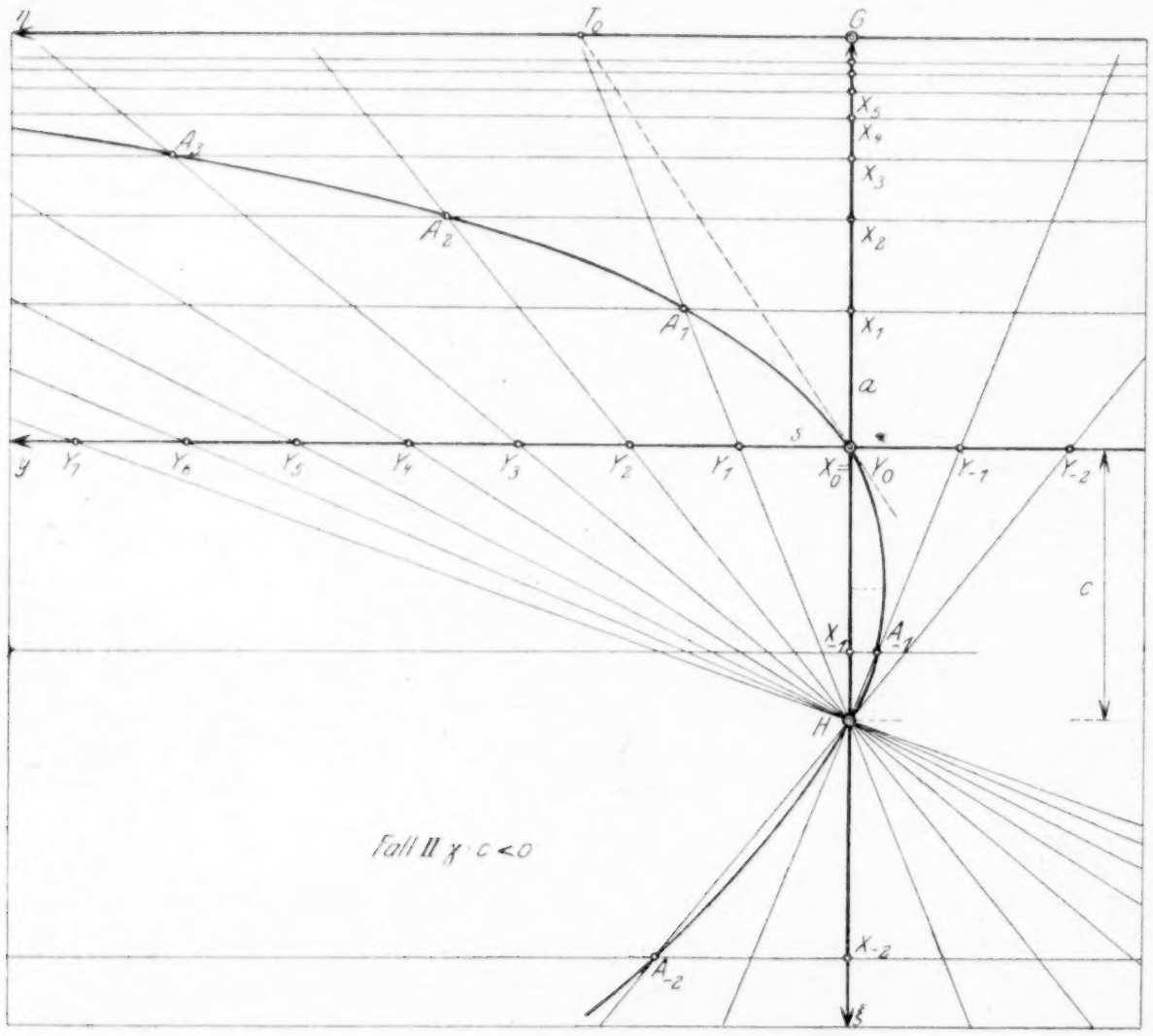


Abb. 7

Der letzte Unterfall würde zwar in der malerischen Perspektive keine Bedeutung haben; doch steht nichts im Wege, ihn geometrisch ebenfalls zu behandeln. Um unsere analytischen Betrachtungen sogleich wieder durch die Anschauung zu beleben, denken wir neben der Abb. 4 des Unterfalles α sogleich auch die Abb. 6 und 7 als Beispiele für die Unterfälle β und γ gezeichnet, was ja keine Schwierigkeit bietet, wenigstens nicht für den anfänglichen Verlauf der Kurven vom Punkte $X_0 = Y_0$ aus nach beiden Richtungen hin. In den unverkleinerten Abbild. 6, 7 ist $c = \pm 3$ cm gewählt.

Anknüpfend an die für alle drei Unterfälle gültige Gl. (7) ergibt sich nun analytisch: Wieder gehört zu jedem Werte $\xi > 0$ ersichtlich nur ein Wert η, während für $\xi < 0$ sich kein reller Wert η ergibt, abgesehen im Unterfalle α von dem Punkte H oder $\xi = 3a - c$, $\eta = 0$, der ein isolierter Punkt der Kurve ist (vergl. Abb. 4) und im folgenden außer Betracht bleiben soll. Doch im Gegensatze zu dem ersten Falle $c = 3a$ ist jetzt für $\lim \xi = +0$ der Grenzwert $\lim \eta$ in den Unterfällen α und γ gleich $+\infty$, dagegen im Unterfalle β gleich $-\infty$. Als Schnittpunkt der Kurve mit der ξ-Achse ergibt sich im Unterfalle α noch der Punkt $\xi = 3a$, in den Unterfällen β und γ dagegen die Punkte $\xi = 3a$ und $\xi = 3a - c$. Auch ist leicht zu übersehen, für welche Intervalle der Abszisse ξ die Ordinate η positiv oder negativ wird (vergl. deswegen die Abb. 4, 6 und 7).

Es ergibt weiter die Gl. (7):

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \left[1 + \frac{c - 3a}{\xi} + \ln \frac{\xi}{3a} \right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Für den Punkt $\xi = 3a$, $\eta = 0$ wird hiernach:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\xi = 3a} = \frac{s}{3a \ln \frac{2}{3}}.$$

Die Gleichung der Tangente der Kurve in diesem Punkte lautet daher:

$$\eta = \frac{s}{3a \lg \frac{2}{3}} (\xi - 3a).$$

Sie schneidet, wie im Falle I, die Ordinatenachse stets im Punkte T_0 oder $\eta = -\frac{s}{\ln \frac{2}{3}}$.

Wann ist nun $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ und zugleich $\frac{d\eta^2}{d\xi^2} \neq 0$, d. h. wann hat die Ordinate η ein Maximum oder Minimum? Hierzu ist ersichtlich nach der Gl. (14) notwendig, daß

$$1 + \frac{c-3a}{\xi} + \ln \frac{\xi}{3a} = 0 \quad \text{oder} \quad \ln \frac{\xi}{3a} = \frac{3a-c}{\xi} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

ist.

Es sei gleich hier bemerkt, daß für die Wurzeln ξ dieser Gleichung die zugehörigen Ordinaten η sich nach der Formel (7) oder gemäß der Gl. (15) nach der Formel:

$$\eta = -s \cdot \frac{(\xi + c - 3a)^2}{c \ln \frac{2}{3}} \frac{1}{\xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ergeben.

4. Diskussion der transzendenten Gleichung. Um nun jedoch die Wurzeln der transzendenten Gl. (15) zu finden, setzen wir jede der beiden Seiten der Gl. (15) gleich $-\tau - 1$ und außerdem

$$\xi = \frac{3a}{\sigma e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

wo σ und τ neue Variable bedeuten. Dann ergeben sich die beiden neuen Gleichungen:

$$\tau = \ln \sigma, \quad \tau = \varepsilon\sigma \quad . \quad . \quad . \quad (18\,\text{a,b}), \quad \text{wo} \quad \varepsilon = \frac{c-3a}{3a} e \quad . \quad . \quad . \quad (19) \quad \text{ist.}$$

Von den reellen Wurzeln (σ, τ) der Gleichungen (18) bestimmen die Wurzeln σ nach der Gl. (17) alle reellen Wurzeln ξ, welche der Gl. (15) genügen. Zur Auflösung des Gleichungspaares (18) wollen wir nun ein graphisches Verfahren anwenden. Wir denken in einem rechtwinkligen σ, τ-Koordinatensystem die durch die Gleichungen (18 a, b) dargestellten Kurven gezeichnet. Die Gl. (18 a) stellt einfach die logarithmische Linie dar, die Gl. (18 b) eine Gerade durch den Anfangspunkt mit einer Amplitude φ, deren Tangensfunktion gleich ε ist. Wir berechnen zunächst die Amplitude φ_0 der durch den Koordinatenanfangspunkt M gehenden Tangente der logarithmischen Linie, Abb. 8. Da für letztere $\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{1}{\sigma}$ ist, so lautet die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkte $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ der logarithmischen Linie:

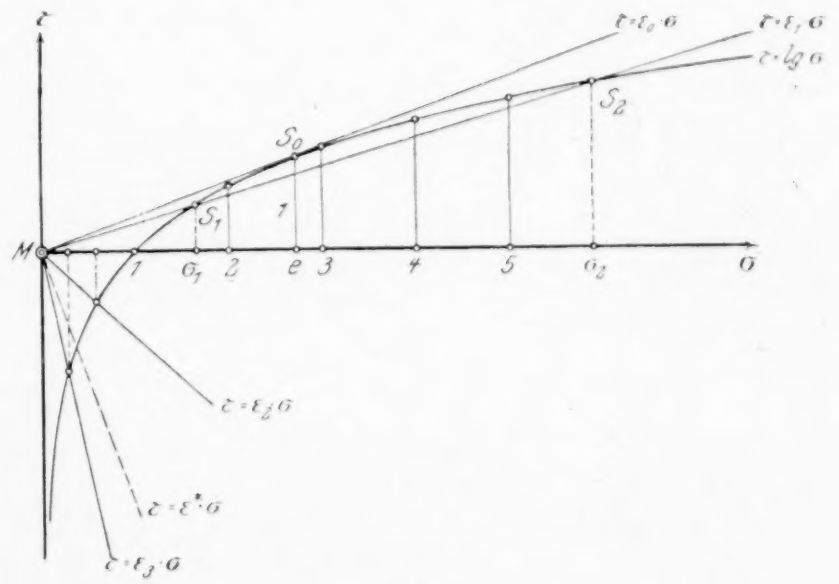


Abb. 8

$$\tau - \bar{\tau} = \frac{1}{\bar{\sigma}} (\sigma - \bar{\sigma}), \text{ wo } \bar{\tau} = \lg \bar{\sigma} \text{ ist.}$$

Für die durch den Koordinatenanfangspunkt gehende Tangente ergeben sich hieraus die Koordinaten des Berührungspunktes S_0 als: $\bar{\tau} = \tau_0 = 1$ und $\bar{\sigma} = \sigma_0 = e$. Also gilt für die Amplitude φ_0 dieser besonderen Tangente

$$\varepsilon_0 = \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1}{e}.$$

Wir können daher sogleich folgenden Satz aufstellen: Eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt $\tau = \varepsilon\sigma$ hat mit der logarithmischen Linie $\tau = \lg \sigma$ **keinen** reellen Schnittpunkt gemein, wenn $\varepsilon > \varepsilon_0$ ist, **zwei zusammenfallende** Schnittpunkte, wenn $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist, **zwei getrennte** reelle Schnittpunkte, wenn $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ist, **die Schnittpunkte mit den Abszissen 1 und** $+\infty$, wenn $\varepsilon = 0$, d. h. $c = 3a$ ist, also der Fall I vorliegt, **einen** reellen Schnittpunkt, wenn $\varepsilon < 0$ ist.

Wenn dieser Satz auch durch die Anschauung bereits richtig erscheint, so wollen wir ihn doch völlig streng beweisen. Für die Amplitude φ der Verbindungslinie eines beliebigen Punktes P oder $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ der logarithmischen Linie mit dem Koordinatenanfangspunkt M gilt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} = \frac{\ln \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \quad \text{und} \quad \frac{d \operatorname{tg}\varphi}{d\bar{\sigma}} = \frac{1 - \ln \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^2}.$$

Diese Ableitung wird gleich 0 für $\bar{\sigma} = \sigma_0 = e$, d. h. wenn die Verbindungslinie MP eben die Tangente ist; sie ist positiv, wenn $0 < \bar{\sigma} < \sigma_0$ und negativ, wenn $\bar{\sigma} > \sigma_0$ ist. Hieraus folgt leicht: Die Verbindungslinie MP dreht sich stets in »positivem« Sinne mit der Amplitude $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ beginnend bis zur Amplitude φ_0, wenn $\bar{\sigma}$ von 0 bis σ_0 zunimmt, um dann wieder in negativem Sinne sich zurückzudrehen bis zur Amplitude $\varphi = 0$ für $\lim \bar{\sigma} = +\infty$. Hiermit ist der obige Satz bewiesen.

Soviel reelle Schnittpunkte dieser Satz nun für jede Möglichkeit angibt, soviel reelle Wurzelpaare (σ, τ) haben auch die Gl. (18a, b), und ebenso viel reelle Wurzeln ξ hat demnach gemäß der Gl. (17) auch die transzendente Gl. (15). Die genauere Bestimmung der Wurzelpaare σ, τ, die über die durch die Zeichnung gelieferten Werte hinausgeht, mag dann nach irgend einer Näherungsmethode erfolgen, worauf wir hier nicht einzugehen brauchen. Damit sind dann also in jedem speziellen Falle die gesuchten Wurzeln ξ gefunden.

5. Maxima, Minima und Wendepunkte der Diagonalkurve. Wir kehren nun zurück zu der Frage auf S. 259, die wir durch die Formel ergänzen:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \frac{1}{\xi} \left[\frac{3a - c}{\xi} + 1 \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20).$$

Für den Klammerausdruck gilt nach den Gl. (17) und (19):

$$\frac{3a - c}{\xi} + 1 = 1 - \varepsilon\sigma = 1 - \tau \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Die Gl. (20) nimmt daher auch die Form an:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \frac{1}{\xi} (1 - \tau) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20').$$

Für $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{e}$, $\sigma = \sigma_0 = e$ und $\tau = \tau_0 = 1$ (gemäß der Gl. (18b)) wird also die rechte Seite gleich 0. Wir gewinnen somit endlich das folgende Resultat:

Für den Unterfall $c > 3a$, d. h. $\varepsilon > 0$ gilt:

Es hat die Ordinate η der Diagonalkurve (7) **kein** Maximum oder Minimum, wenn $\varepsilon > \varepsilon_0$ oder $\frac{c}{3a} > 1 + \frac{1}{e^2}$ ist, dagegen **ein** Maximum und **ein** Minimum, wenn $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ oder $1 < \frac{c}{3a} < 1 + \frac{1}{e^2}$ ist. In der Tat ist zuletzt für die beiden Wurzelpaare (σ_1, τ_1) und (σ_2, τ_2) der Gl. (18a, b) die eine Wurzel $\tau_1 < 1$, die andere $\tau_2 > 1$ (vergl. die Abb. 8), also nach Gl. (20) und (21) $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_{\tau=\tau_1} < 0$ und $\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_{\tau=\tau_2} > 0$. Den Wurzeln σ_1 und σ_2 entsprechend ist die Abszisse des Maximums bezw. Minimums gegeben durch die Formel

$$\xi_1 = \frac{3a}{\sigma_1 e}, \qquad \xi_2 = \frac{3a}{\sigma_2 e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22a, b).$$

(In dem Beispiel der Abb. 4, wo die Ordinaten des Maximums und Minimums gestrichelt eingezeichnet sind, ist $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{0{,}5}{4{,}5} e = 0{,}302$ und gemäß der Abb. 8 $\sigma_1 = 1{,}645$, $\sigma_2 = 5{,}852$ cm, also $\xi_1 = 1{,}007$, $\xi_2 = 0{,}352$ cm.)

Ist jedoch $\frac{c}{3a} = 1 + \frac{1}{e^2}$ $\left(\text{d. h. } \varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{e}, \text{ also } \tau = \tau_0 = 1\right)$, so hat die Diagonalkurve einen Wendepunkt mit einer zur ξ-Achse parallelen Tangente und zwar für die Abszisse $\xi_0 = \frac{3a}{e^2}$.

In Rücksicht auf den Uebergang des Unterfalles α bezw. β zu dem ersten Falle $c = 3a$ oder $\varepsilon = 0$ (vergl. die Formel (19) und den Satz unten, S. 259) sei noch erwähnt:

Nähert sich $\frac{c}{3a}$ dem Werte 1 von größeren Werten her, so nähert sich der Kurvenpunkt des Minimums unbegrenzt dem Koordinatenanfangspunkt (vergl. die Abb. 4 und 5). Denn für $\lim \varepsilon = +0$ ergibt sich $\lim \sigma_2 = +\infty$, also nach der Gl. (22b) $\lim \xi_2 = +0$. Andererseits folgt aus der Gl. (7) und der Gl. (15) nach Elimination der Größe $3a - c$

$$\eta_2 = -\frac{s}{c \ln \frac{2}{3}} \xi_2 \ln^2 \frac{\xi_2}{3a};$$

die für $\lim \xi_2 = +0$ zunächst unbestimmte Form der rechten Seite $\lim \frac{\lg^2 \frac{\xi_2}{3a}}{\frac{1}{\xi_2}}$ bestimmt sich aber als $+0$.

Nähert sich $\frac{c}{3a}$ indes dem Werte 1 von kleineren Werten her, so nähert sich der eine Schnittpunkt H der Diagonalkurve mit der ξ-Achse, dessen Abszisse $\xi = 3a - c$ beträgt, unbegrenzt dem Koordinatenanfangspunkt (vergl. die Abb. 6 und 5).

Wir wollen auch einen Blick auf den bisher ausgeschlossenen Grenzfall $\lim c = +\infty$ werfen. Da dann der Punkt H der Abb. 4 ins Unendliche gerückt ist, ergeben sich die Kurvenpunkte A_n einfach bezw. als Schnittpunkte der Parallelen durch X_n und Y_n zu den Koordinatenachsen. Die Gl. (7) ergibt für $\lim c = \infty$ als Gleichung der neuen Diagonalkurven

$$\eta = s \frac{\lg \frac{\xi}{3a}}{\lg \frac{2}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7'),$$

d. h. eine Kurve, die nicht wesentlich von der logarithmischen Kurve $\eta = \lg \xi$ verschieden ist (ebenso nämlich, wie etwa die Kurve $\eta = s \sin \frac{\xi}{a}$ von der Sinuslinie $\eta = \sin \xi$ verschieden ist).

Doch wollen wir noch auf folgende interessante Beziehung hinweisen: Wenn wir ganz den Abb. 1, 2, 3 analog die Diagonalkurve der Abb. 5 von einem Augenpunkt O aus in die Fußbodenebene projizieren, so gehen die Punkte X_n in solche Punkte X_n^0 über, daß die Abstände $X_n^0 X_{n+1}^0 = \frac{d}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ (für $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$) sind, wo $d = HO$ die gewählte Distanz bedeutet. Sieht man dann in der Fußbodenebene die Richtungen $\vec{FX_0}$ und die nach rechts gerichtete Senkrechte hierzu durch F, wo F der Fußpunkt des Lotes vom Augenpunkt O auf die Fußbodenebene ist, als ξ', η'-Achsen an, so wird die projizierte Diagonalkurve der Fußbodenebene durch die der Gl. (7') analog gebildete Gleichung:

$$\eta' = s \frac{\lg \frac{\xi'}{3a'}}{\lg \frac{2}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7'')$$

gegeben, wenn $\frac{d}{2}\frac{2}{3} = a'$ gesetzt ist. —

Wir bemerken nun zunächst noch im Hinblick auf das Folgende: Für den auch sonst ausgeschlossenen Fall $c = 0$, d. h. $\varepsilon = \varepsilon^* = -e$ nach der Gl. (19) haben die Gl. (18a, b) das reelle Wurzelpaar $\sigma^* = \frac{1}{e}$, $\tau^* = -1$ (vergl. Abb. 8).

In dem Unterfalle $0 < c < 3a$, d. h. $0 > \varepsilon > -e$, hat die Ordinate η der Diagonalkurve nur ein Maximum, da $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ nach der Gl. (20') jetzt für $\xi = \xi_1 = \frac{3a}{\sigma_1 e}$, $\tau = \tau_1$ mit der Bedingung $\tau^* < \tau_1 < 0$ negativ ist. Für die Abszisse ξ_1 des Maximums gelten außerdem die Ungleichungen $3a - c < \xi_1 < 3a$, da ja $\xi = 3a$ und $\xi = 3a - c$ die Abszissen für die Schnittpunkte der Kurve mit der ξ-Achse sind. (In dem Beispiel der Abb. 6 ist insbesondere $\varepsilon = \varepsilon_2 = -\frac{1,5}{4,5}$ $e = -0{,}906$ und gemäß der Abb. 8 $\sigma_1 = 0{,}587$, also $\xi_1 = 2{,}820$ cm).

Im Unterfalle $c < 0$ endlich hat die Ordinate η der Diagonalkurve nur ein Minimum, da $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ jetzt für $\xi = \xi_1$, $\tau = \tau_1$ mit der Bedingung $-\infty < \tau_1 < \tau^*$ positiv ist. Für die Abszisse ξ_1 des Minimums gelten jetzt die Ungleichungen $3a - c > \xi_1 > 3a$. (In dem Beispiel der Abb. 7 ist insbesondere $\varepsilon = \varepsilon_3 = -\frac{7{,}5}{4{,}5}e = -4{,}530$ und gemäß der Abb. 8 $\sigma_1 = 0{,}281$, also $\xi_1 = 6{,}050$ cm).

Die Formel (20) gestattet uns, auch noch die Koordinaten ξ_w, η_w des Wendepunktes für die einzelne Diagonalkurve zu bestimmen. Aus der Bedingung $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0$ folgt mit Rücksicht auf (7):

$$\xi_w = c - 3a, \qquad \eta_w = s\,\frac{(c-3a)^2}{c \lg \frac{2}{3}} \lg\left(\frac{c}{3a} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Nur im Unterfalle $c > 3a$ hat die Diagonalkurve einen reellen Wendepunkt, dessen Koordinaten durch die Gl. (23) bestimmt sind (vergl. Abb. 4).

6. Schlussbemerkung. Wir wollen nun zum Schluß noch die Frage aufwerfen: Lassen sich außer den bereits konstruierten »Diagonalpunkten« A_n noch weitere Punkte der Diagonalkurve (7) mit Zirkel und Lineal konstruieren (bei gegebenen Strecken s, a, c)? Können wir z. B., wenn wir die Teile $Y_{n-1}\,Y_n$ der Grundlinie noch einmal halbieren durch die Punkte M_n, auch die Kurvenpunkte auf den Strahlen $H\,M_n$ konstruieren?

Für einen jeden Kurvenpunkt P ist nun, wenn Q der Schnittpunkt des Strahles HP mit der Grundlinie $Y_0\,Y_n$ ist:

$$u = \overrightarrow{Y_0\,Q} = \frac{c}{\xi + (c - 3a)}\,\eta$$

oder gemäß der Formel (7):

$$u = s\,\frac{\lg \frac{\xi}{3a}}{\lg \frac{2}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Soll dann der Punkt P mit Zirkel und Lineal konstruierbar sein, so muß ersichtlich gleiches vom Punkte Q gelten. Außer dem Punkte Q wäre aber etwa noch die Abszisse ξ zu konstruieren, um den entsprechenden Punkt P zu gewinnen.

Wir setzen nun $\frac{\xi}{3a} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p}{q}}$, wo p, q teilerfremde ganze Zahlen sein sollen und q positiv sei, oder

$$\xi = 3a \sqrt[q]{\left(\frac{2}{3}\right)^p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Dann ist $\lg \frac{\xi}{3a} = \frac{p}{q} \lg \frac{2}{3}$, also:

$$u = \overrightarrow{Y_0\,Q} = s\,\frac{p}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24').$$

Ist dann $q = 2^m$, wo m eine beliebige positive ganze Zahl ist, so können wir ersichtlich nach Gl (25) durch wiederholtes Wurzelausziehen die (stets positive) Abszisse ξ und nach Gl. (24') auch die Strecke u und damit den zugehörigen Kurvenpunkt P konstruieren.

Für die oben eingeführten Halbierungspunkte M_n ist insbesondere $q = 2$, d. h. die auf den zugehörigen Strahlen HM_n gelegenen Kurvenpunkte P lassen sich ebenfalls mit Zirkel und Lineal konstruieren. Für den Halbierungspunkt M_1 von $Y_0\,Y_1$ ist $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, also

$$\xi = 3a \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2a \cdot 3a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25').$$

In der Abb. 4 des Unterfalles $c > 3a$ ist beispielsweise die einfache Konstruktion des zugehörigen Kurvenpunktes P auf dem Strahl $H\,M_1$ ausgeführt; es ist dort der Halbkreis über $G\,X_0$ beschrieben und mit der Geraden $A_1\,X_1$ im Punkte $\bar{X}$ geschnitten. Dann ist $G\bar{X}$ nach GX^* auf die ξ-Achse übertragen und die Ordinatenlinie durch X^* mit dem Strahl $G\,M_1$ im Punkte P zum Schnitt gebracht.

Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkeleisens.

Von **E. TREFFTZ** in Dresden.

Die in der technischen Elastizitätslehre regelmäßig gestellte Frage nach der größten, in einem Bauteil auftretenden Spannung muß zuweilen dahin beantwortet werden, daß sich rechnerisch unendlich große Spannungen ergeben, wie z. B. bei der Torsion prismatischer Stäbe an einspringenden Ecken des Querschnitts. Die Frage bedarf dann einer Modifikation; wir müssen untersuchen, welche Abrundung einer solchen einspringenden Ecke oder Kante die Spannung auf das zulässige Maß reduziert, bezw. wie weit eine Spannungserniedrigung durch eine Abrundung überhaupt zu erreichen ist.

In der vorliegenden Arbeit berechne ich den Einfluß einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der einspringenden Ecke eines Winkeleisens, und zwar entwickle ich ein Näherungsverfahren für schwache Abrundungen (kleine Abrundungshalbmesser). Eine Ergänzung hierzu wird demnächst folgen; in einer Dissertation werden einige spezielle Fälle stärkerer Abrundung behandelt werden.

1. Die Aufgabe und das Prinzip der Näherungslösung. Wir betrachten ein Winkeleisen, dessen Schenkel gleiche Breite $b = 1$ haben, und nehmen, was für unsere Fragestellung zulässig ist, an, daß sie sich ins Unendliche erstrecken. In bekannter Weise kann man den Spannungszustand durch eine hydrodynamische Analogie deuten[1]). Sind u und v die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, deren Rotation konstant und zwar gleich 2 ist, und für die der Rand des Querschnitts Stromlinie ist, so lassen sich die Komponenten der Schubspannung für die x- und y-Richtung in der Form darstellen:

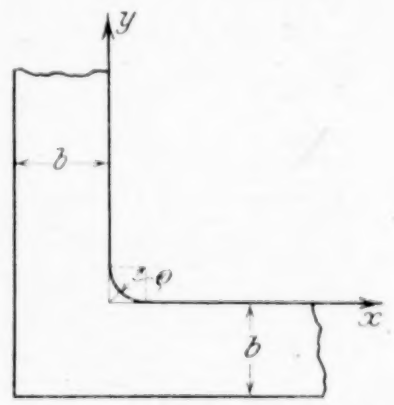


Abb. 1

$$\tau_{xz} = G\omega u, \quad \tau_{yz} = G\omega v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo G den Schubmodul, ω die Verdrehung pro Längeneinheit des gedrillten Stabes bedeutet. Das Koordinatensystem ist dabei so gelegt, daß die z Achse mit der Richtung der Stabachse zusammenfällt und der Nullpunkt in die einspringende Ecke fällt. Beim Umströmen der einspringenden Ecke wird nun die Geschwindigkeit unendlich, und demnach ergeben sich hier auch unendliche Schubspannungen. Ueber den Charakter dieser Singularität gewinnen wir folgendermaßen Aufschluß. Wir stellen uns vor, daß wir der genannten Strömung von konstantem Wirbel in der Umgebung der Ecke eine wirbelfreie Strömung überlagern, die der ersten entgegengerichtet ist. Wenn wir die Stärke dieser Strömung passend bestimmen, so wird an der Ecke gerade die Geschwindigkeit Null herauskommen, d. h. im Spannungsproblem die Spannung Null. Das bedeutet, daß wir die Strömung, die uns die Schubspannungen liefert, in der Nähe der Ecke zerlegen können in eine Strömung von konstantem Wirbel, die an der Ecke die Geschwindigkeit Null hat, und in eine Potentialströmung, die das Unendlichwerden der Spannung darstellt. Nun ist das komplexe Potential einer eine scharfe Ecke umströmenden wirbelfreien Strömung

$$F(z) = Cz^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

dessen Ableitung die Geschwindigkeitskomponenten liefert:

$$u - iv = F'(z) = {}^2/_3\, Cz^{-1/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Konstante C ist die charakteristische Konstante der Singularität, sie muß aus der Lösung des Spannungsproblems für das nicht abgerundete Winkeleisen entnommen werden. In einer Arbeit in den mathematischen Annalen[2]) habe ich diese Lösung für das Winkeleisen mit unendlich langen Schenkeln gegeben; aus der numerischen Durch-

---

[1]) Vergl. den Zus. Bericht von Th. Pöschl, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 314.

[2]) E. Trefftz, Ueber die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt. Math. Ann. Band 82, 1920, Heft 1/2, Seite 97 bis 112.

rechnung ergibt sich C zu 1,48. In der Umgebung der Ecke werden also die Spannungskomponenten

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{0{,}988}{\sqrt[3]{z}} G\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Wird jetzt die einspringende Ecke abgerundet, so fragt es sich, wie groß die Maximalspannung in dem innersten Punkte wird. Der strengen Lösung steht hier die Schwierigkeit der numerischen Durchführung im Wege. Wir wollen deshalb die folgende Näherungsmethode anwenden. Den Teil der Spannungen, welcher der Strömung mit konstantem Wirbel entspricht, wollen wir vernachlässigen, denn er wird in der Ecke Null und kommt somit gegen den dort unendlich werdenden Teil (4), der der Potentialströmung entspricht, nicht in Frage. Bezüglich dieses letzteren Teils bedenken wir, daß sich die Wirkung der Abrundung schon in geringer Entfernung nicht mehr bemerkbar macht. Wir werden also eine Potentialströmung suchen, die um die abgerundete Ecke strömt und sich in einiger Entfernung von der Ecke, d. h. in mathematischer Idealisierung: im Unendlichen verhält wie die Strömung um die unabgerundete Ecke. Wir erhalten diese Strömung, indem wir das von der abgerundeten Ecke begrenzte Gebiet, und zwar das nach der konvexen Seite gelegene, auf die Halbebene abbilden; dabei gehen die Stromlinien in die Geraden $\eta =$ konst. über (siehe Abb. 2c).

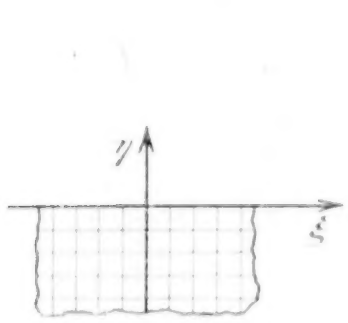


Abb. 2a

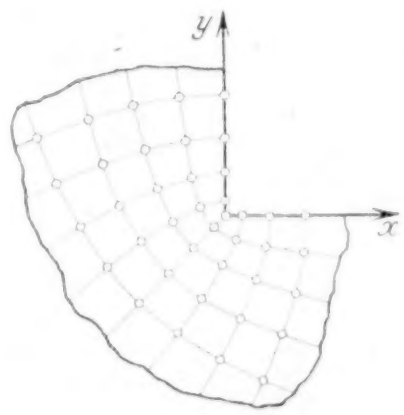


Abb. 2b

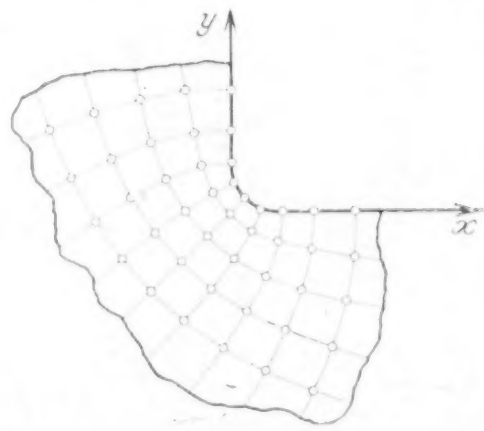


Abb. 2c

2. Die Abbildung der abgerundeten Ecke auf die Halbebene. Zur Abbildung der abgerundeten Ecke auf die Halbebene stehen uns die Methoden von Schwarz und Christoffel zur Verfügung, die wir am einfachsten folgendermaßen darstellen.

Es sei $$z = f(\zeta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

die Abbildungsfunktion, die die untere Halbebene der ζ-Ebene in das von der abgerundeten Ecke begrenzte Gebiet überführt. Die Ableitung dieser Funktion bezeichnen wir mit $z' = p + iq$, es ist also

$$p = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad q = -\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \ldots\ldots\ldots (6),$$

die zweite Ableitung sei $z'' = s + it$, es ist also

$$s = \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{\partial x}{\partial \eta^2}, \quad t = -\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \quad (7).$$

Betrachten wir nun irgend einen Punkt der ξ-Achse, so erhalten wir aus (5) mit $\eta = 0$ die Randpunkte in der z-Ebene

$$z = f(\xi), \quad x = x(\xi), \quad y = y(\xi) \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Die Koordinaten x und y sind hier als Funktionen des Parameters ξ dargestellt; es ist also die Krümmung des Randes in der z-Ebene

$$k = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}^3} = \frac{pt - qs}{(p^2 + q^2)^{3/2}} \quad \ldots\ldots (9).$$

Bezeichnen wir mit $J(f)$ den Imaginärteil einer Funktion f, mit R den Realteil, so wird nach (6) und (7)

$$k = \frac{1}{|z'|} J\frac{z''}{z'}$$

oder:

$$k\sqrt{p^2+q^2} = J\left(\frac{z''}{z'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Nun ist längs der einzelnen Begrenzungsstücke k konstant; gehen wir also längs der ξ-Achse weiter, so erhalten wir durch Differentiation nach ξ

$$k\frac{ps+qt}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{\partial}{\partial\xi} J\left(\frac{z''}{z'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Nun ist für $d\zeta = d\xi =$ reell

$$\frac{\partial}{\partial\xi} J\left(\frac{z''}{z'}\right) = J\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right).$$

Die rechte Seite wird also einfach $J\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right)$.

Die linke Seite wird $k\sqrt{p^2+q^2}\,R\left(\frac{z''}{z'}\right)$

oder bei Benutzung von (10): $J\left(\frac{z''}{z'}\right) R\left(\frac{z''}{z'}\right)$

und das ist $= \frac{1}{2} J\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$.

Wir erhalten somit die Bedingung dafür, daß die Krümmung konstant ist,

$$J\left\{\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2\right\} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Wäre der Ausdruck $\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$ überall regulär, so könnten wir aus dem Verschwinden seines Imaginärteils längs der reellen Achse schließen, daß er überall Null wäre. Nun sollen den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ die Punkte in der z-Ebene entsprechen, an denen der Kreisbogen an die Geraden anschließt; in diesen Punkten hat $z = f(\zeta)$ eine Singularität, also auch der Ausdruck (12).

Den Charakter dieser Singularität erkennen wir daraus, daß an diesen Punkten die Krümmung sich sprungweise ändert; es muß also (10) der Imaginärteil von $\left(\frac{z''}{z'}\right)$ eine Singularität haben wie der Imaginärteil von $c \ln(\xi \pm 1)$. Wir erfüllen das, indem wir für $\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$ in den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ einfache Pole annehmen. Schließlich haben wir im Unendlichen $z = \zeta^{3/2}$, also

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = -\frac{5}{8}\zeta^{-2}.$$

Im Unendlichen muß also $\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2$ wie $-\frac{5}{8}\frac{1}{\zeta^2}$ gegen Null gehen. Setzen wir

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{z''}{z'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = -\frac{5}{8}\frac{1}{\zeta^2-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

so sind die Bedingungen für $\zeta = \pm 1$ und im Unendlichen erfüllt; ebenso gilt (12), so daß die Konstanz der Krümmung längs der einzelnen Begrenzungsstücke gesichert ist. In (13) haben wir die Differentialgleichung gefunden, der unsere Abbildungsfunktion genügt. Wir verwandeln sie in eine lineare Differentialgleichung, wenn wir $w = \frac{1}{\sqrt{z'}}$ als neue Variable einführen. Gl. (13) wird dann:

$$w'' - \frac{5w}{16(\zeta^2-1)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

In dieser Form verwenden wir die Gleichung zur Integration; wir entwickeln die Lösung einmal im Unendlichen, dann in der Umgebung von $\zeta = 0$ und bestimmen die Integrationskonstanten der Entwicklung am Nullpunkt so, daß sich diese Entwicklung in den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ an die Entwicklung um $\zeta = \infty$ anschließt. Die erste Entwicklung konvergiert außerhalb, die zweite innerhalb des Einheitskreises, so daß wir damit die ganze Abbildung beherrschen.

Setzen wir also im Unendlichen (unter Berücksichtigung des Charakters von $z = f(\zeta)$ im Unendlichen)

$$w = C_1\zeta^{-1/4} + C_5\zeta^{-5/4} + C_9\zeta^{-9/4} + \ldots\ldots \quad (15),$$

so erhalten wir für die Koeffizienten aus der Differentialgleichung die Rekursionsformeln:

$$C_{8n+9} = \frac{(8n+1)\,(8n+5)}{(8n+9)\,(8n+13)-5}\,C_{8n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

wo C_1 als Integrationskonstante stehen bleibt, und C_5, C_{13}, C_{21} usw. Null werden. Numerisch ergeben sich daraus die Werte:

$$C_9 = 0{,}0446\,C_1,\ C_{17} = 0{,}0148\,C_1,\ C_{25} = 0{,}0073\,C_1,\ C_{33} = 0{,}0044\,C_1,\ C_{41} = 0{,}0039\,C_1 \quad (17).$$

Setzt man diese ein und schätzt den Rest nach elementaren Methoden ab, so erhält man für

$$\zeta = \pm 1 \quad w(1) = C_1\,(1{,}092 \pm 0{,}004),\ w(-1) = C_1\,e^{i\pi/4}\,(1{,}092 \pm 0{,}004) \quad (18).$$

Für die Entwicklung am Nullpunkte setzen wir an:

$$w = \gamma_0 + \gamma_1\,\zeta + \gamma_2\,\zeta^2 + \gamma_3\,\zeta^3 + \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

und erhalten für die Koeffizienten die Rekursionsformeln

$$\gamma_{\nu+2} = \frac{\nu\,(\nu-1) - {}^5/_{16}}{(\nu+2)\,(\nu+1)}\,\gamma_\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

γ_0 und γ_1 bleiben als Integrationskonstanten unbestimmt, für die übrigen ergibt die numerische Auswertung:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= -\,0{,}1563\,\gamma_0, & \gamma_3 &= -\,0{,}0521\,\gamma_1 \\ \gamma_4 &= -\,0{,}0220\,\gamma_0, & \gamma_5 &= -\,0{,}0148\,\gamma_1 \\ \gamma_6 &= -\,0{,}0086\,\gamma_0, & \gamma_7 &= -\,0{,}0069\,\gamma_1 \\ \gamma_8 &= -\,0{,}0045\,\gamma_0, & \gamma_9 &= -\,0{,}0040\,\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Setzt man diese Werte ein und schätzt wieder den Rest ab, so ergibt sich mit einer Genauigkeit von $^1/_2$ vH

$$\left.\begin{aligned} w(1) &= 0{,}791\,\gamma_0 + 0{,}906\,\gamma_1 \\ w(-1) &= 0{,}791\,\gamma_0 - 0{,}906\,\gamma_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Diese Werte müssen den oben ermittelten gleich sein, d. h. es ist:

$$0{,}791\,\gamma_0 + 0{,}906\,\gamma_1 = 1{,}092\,C_1,$$
$$0{,}791\,\gamma_0 - 0{,}906\,\gamma_1 = 1{,}092\,e^{i\pi/4}\,C_1,$$

woraus sich γ_0 und γ_1 berechnen:

$$\gamma_0 = 0{,}690\,(1 + e^{i\pi/4})\,C_1,\ \gamma_1 = 0{,}603\,(1 - e^{i\pi/4})\,C_1 \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Die übrig bleibende Integrationskonstante C_1 bestimmt sich aus der Krümmung des abrundenden Kreisbogens unserer Ecke. An einem beliebigen Randpunkte ist die Krümmung $k = \frac{1}{|z'|}\,J\left(\frac{z''}{z'}\right)$ oder, in $w = \frac{1}{\sqrt{z'}}$ ausgedrückt:

$$k = -\,2\,|w|^2\,J\left(\frac{w'}{w}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Setzen wir hier die Werte von w und w' für $\zeta = 0$ ein, $w(0) = \gamma_0$, $w'(0) = \gamma_1$, so ergibt sich $k_0 = -\,2\,\gamma_0\,\gamma_0\,J\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)$ oder

$$k_0 = -\,2\,J(\bar{\gamma}_0\,\gamma_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Daraus ergibt (23) $$k_0 = 1{,}18\,C_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26),$$

und damit ist unsere Aufgabe soweit gelöst, als sie für unsere Aufgabe von Bedeutung ist. Auf die Aufstellung der Reihen für z können wir verzichten, da für die Spannungsberechnung nur $z' = \frac{1}{w^2}$ in Frage kommt und wir dieses auch nur im innersten Punkte des Kreisbogens brauchen, d. h. für $\zeta = 0$, weil uns ja nur die Maximalspannung interessiert.

3. Die maximale Spannung in der einspringenden Ecke. Nach Abschnitt 1 erhalten wir die Spannungskomponenten in der Umgebung der Ecke in der Form:

$$\tau_{xz} - i\,\tau_{yz} = G\,\omega\,F'(z)$$

aus der Ableitung des komplexen Potentials $F(z)$ für eine die Ecke umströmende Potentialströmung, dessen Ableitung im Unendlichen von der Form $F'(z) = \frac{0.988\,G\,\bar{\omega}}{\sqrt[3]{z}}$ ist. Da in der ζ-Ebene die Stromlinien einfach die Geraden $\eta =$ konst. sind, so wird das gesuchte komplexe Strömungspotential

$$F(z) = A\,\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27),$$

die Spannungen werden also:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\omega A \frac{d\zeta}{dz} = G\omega A w^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Die Konstante A bestimmt sich aus der vorstehenden Bedingung für das Unendliche; im Unendlichen wird $\frac{d\zeta}{dz} = w^2 = C_1^2 \zeta^{-1/2}$, daraus folgt durch Integration $\zeta = \left(\frac{3 C_1^2}{2} z\right)^{2/3}$, also

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\omega A C_1^2 \left(\frac{3 C_1^2}{2} z\right)^{-1/3} = G\omega \sqrt[3]{\frac{2}{3}} A C_1^{4/3} z^{-1/3} \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Die Uebereinstimmung mit (4) erfordert $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} A C_1^{4/3} = 0{,}988$ oder $A = 1.13\, C_1^{-4/3}$. Die größte Spannung tritt im innersten Punkt des abrundenden Kreisbogens auf, d. h. für $\zeta = 0$, hier wird

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\,\omega\, A\, |w_0|^2 = G\,\omega\, A \gamma_0\, \bar{\gamma}_0.$$

Wir erhalten daraus für die maximale Spannung

$$\tau_{\max} = G\omega\, 1{,}13\, C_1^{-4/3}\, 1{,}625\, C_1^2 = \frac{1{,}74\; G\omega}{\sqrt[3]{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Dies ist unser Hauptresultat, es gibt uns vor allen Dingen die Art des Unendlichwerdens von $\tau_{\max}$ mit abnehmendem Abrundungshalbmesser.

Es ist zweckmäßig, sich von der Spezialisierung $b = 1$ frei zu machen und das eben gewonnene Resultat noch in etwas veränderter Form darzustellen. Erstrecken sich die Schenkel des Winkeleisens ins Unendliche, so geht die Spannung an dem Rande gegen den Wert $\tau_\infty = G\omega b$ und zwar nähert sich sowohl an der Oberseite wie an der Unterseite τ diesem Werte sehr rasch (exponentiell). Auch für Winkeleisen endlicher Länge unterscheidet sich die Maximalspannung an den Schenkeln nur wenig von diesem Werte. Mit Benutzung dieser Spannung schreibt sich (30)

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_\infty} = 1{,}74 \sqrt[3]{\frac{b}{\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

wobei die Spezialisierung $b = 1$ aufgegeben ist. Es läge natürlich nahe, die Abrundung so zu wählen, daß $\tau_{\max} = \tau_\infty$ würde, doch wäre das schon eine so starke Abrundung, daß unsere Näherungsmethode nicht mehr anwendbar wäre. An einigen Beispielen stärkerer Abrundung hat Hr. Dassen in einer Aachener Dissertation das Resultat erhalten, das für starke Abrundung ziemlich unabhängig von dem Krümmungshalbmesser $\tau_{\max} = 2\,\tau_\infty$ gesetzt werden kann. 134

Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern.

Von **C. WEBER** in Hildesheim.

Zu den ungelösten Aufgaben der Elastizitätslehre gehört die Frage nach der Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern. Von Wichtigkeit ist besonders die Spannungserhöhung am Rande der Löcher. In vorliegender Arbeit gebe ich die bei einer früheren Gelegenheit[1]) angekündigte Lösung für den Fall der allseitig oder in einer Richtung gezogenen unendlichen Scheibe mit zwei Löchern. Am Schluß wird ein Zahlenbeispiel durchgerechnet und werden Schlußfolgerungen für die mehrfach durchlochte Scheibe gezogen.

1. Aufsuchung einer Teillösung.

Die zwei verschieden großen Löcher, Abb. 1, gehören dem Systeme einer zweipoligen Kreisschar an, deren Polabstand gleich der Längeneinheit genommen ist. Durch die

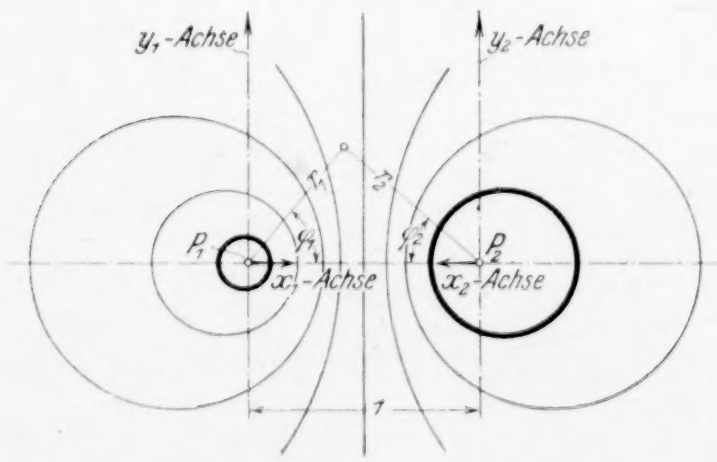


Abb. 1

[1]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 185–187.

Pole P_1 und P_2 sind Polarkoordinatensysteme mit den Koordinaten r_1, φ_1 bezw. r_2, φ_2 gelegt. Im Bedarfsfalle sind die entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 eingeführt. Die Ränder der Löcher seien unbelastet. Im Unendlichen trete entweder allseitig oder in einer beliebigen Richtung die Normalspannung p auf. Die Spannungen sind als zweite Teilableitungen der Airyschen Spannungsfunktion F, welche die Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {y_1}^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial {y_1}^2}\right) = 0$$

erfüllt, gegeben.

Für unendlich großes r_1 bezw. r_2 geht die Spannungsfunktion bei Vernachlässigung der für die Spannungen unwesentlichen unveränderlichen Glieder und Glieder ersten Grades über in

1. $F = {}^1/_2\, p\, {r_1}^2$ für allseitigen gleichmäßigen Zug,
2. $F = {}^1/_2\, p {r_1}^2 \sin^2(\varphi_1 - \alpha)$ für den Fall einer Zugspannung nur in Richtung $\varphi_1 = \alpha$.

Außerdem können noch logarithmische Funktionen auftreten, deren zweite Teilableitungen für $r_1 = \infty$ verschwinden.

Aus dem Falle 2 ergeben sich mit $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die Fälle der in der x_1- bezw. y_1-Achse gezogenen Scheibe.

Zur Auffindung der Spannungsfunktion F' benutze ich den Weg der Umkehrung (Inversion), der in der Göttinger Dissertation von A. Timpe zur Untersuchung der Spannungen in einem durch zwei Kreisbogen begrenzten Streifen angewandt wird; vorliegender Fall mit den sich ergebenden Schwierigkeiten wird jedoch nicht behandelt.

Setzt man in der Funktion $\frac{F}{{r_1}^2}$

$$x_1 = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y_1 = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{bezw.} \quad \varphi_1 = \varphi', \qquad r_1 = \frac{1}{r'},$$

so erhält man eine neue Airysche Spannungsfunktion F'. Jedem Punkte der Funktion F entspricht ein Punkt der neuen Funktion F', der auf einem gleichgerichteten Strahle liegt, dessen Entfernung vom Umkehrpole jedoch den umgekehrten Wert hat. Beliebige Kreise gehen wieder in Kreise über. Durch nochmalige Umkehrung — zum Unterschiede im weiteren Rückkehrung genannt — erhält man wieder die ursprüngliche Funktion F.

Bezeichnen σ_r, σ_t und τ die Spannungen des durch die Funktion F gegebenen Spannungszustandes mit dem Umkehrpol als Koordinatenanfangspunkt, desgleichen σ_r', σ_t' und τ' die durch F' gegebenen Spannungen, so besteht für entsprechende Punkte beider Funktionen folgende Beziehung:

$$\sigma_r = r'^2 \sigma_r' + 2\left(F' - r'\frac{\partial F'}{\partial r'}\right), \qquad \sigma_t = r'^2 \sigma_t' + 2\left(F' - r'\frac{\partial F'}{\partial r'}\right), \qquad \tau = -\, r'^2 \tau' \qquad (1).$$

Hieraus folgt: Die Hauptspannungen gehen wieder in Hauptspannungen über. Den Hauptspannungslinien (Spannungstrajektorien) der Funktion F entsprechen ebenfalls Hauptspannungslinien der umgekehrten Funktion F'. Ein gleichmäßig belasteter bezw. unbelasteter Rand gibt bei der Umkehrung wieder einen gleichmäßig belasteten Rand.

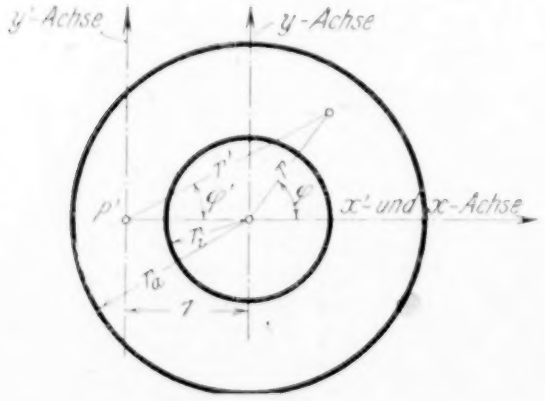


Abb. 2

Die Umkehrung der unendlichen Scheibe mit zwei kreisrunden Löchern gibt, falls P_1, der eine Pol der Kreisschar, als Umkehrpol gewählt wird, einen durch zwei gleichmittliche (konzentrische) Kreise gebildeten Ring, Abb. 2. Der Umkehrpol liegt im Kreisringe im Abstande 1 vom Mittelpunkte. Die Halbmesser der Begrenzungskreise sind r_i und r_a. Da die Ränder der beiden Löcher unbelastet waren, so sind die Begrenzungskreise des Ringes ebenfalls unbelastet oder gleichmäßig belastet. Die Koordinaten, bezogen auf den Mittelpunkt des Ringes, sind mit r und φ (ohne Zeichen) bezeichnet. Die Airysche Spannungsfunktion F' nimmt dann folgende allgemeine Gestalt an, wobei nur zur Nullachse spiegelrechte (symmetrische) Funktionen berücksichtigt sind:

$$F' = a_0 + b_0 r^2 + c_0 \lg r + d_0 r^2 \lg r + (a_1 r + b_1 r^3 + c_1 r^{-1} + d_1 r \lg r) \cos\varphi + e_1 r \varphi \sin\varphi + \sum_{n=2}^{n=\infty} (a_n r^n + b_n r^{n+2} + c_n r^{-n} + d_n r^{-n+2}) \cos n\varphi \qquad (2).$$

Da die Ränder des Kreisringes gleichmäßig belastet sind, so muß die Funktion F' und ihre Ableitung $\frac{\partial F'}{\partial r}$ für $r = r_i$ und $r = r_a$ Festwerte geben. Es bleiben nur die von φ unabhängigen Glieder der allgemeinen Lösung (2) nach:

$$F' = a_0 + b_0 r^2 + c_0 \lg r + d_0 r^2 \lg r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Von den Beiwerten lassen sich zwei so bestimmen, daß für $r = r_a$ die Funktionen F' und $\frac{\partial F'}{\partial r}$ gleich Null werden. Der äußere Rand des Kreisringes ist dann unbelastet und in der Rückkehrung erhält man einen unbelasteten Rand des Loches um P_1. Hieraus erhält man

$$a_0 = c_0 \left(\tfrac{1}{2} - \lg r_a\right) + \tfrac{1}{2} d_0 r_a^2 \quad . \quad . \quad . \quad (4), \qquad b_0 = -\frac{c_0}{2 r_a^2} - d_0 \left(\tfrac{1}{2} + \lg r_a\right) \quad . \quad . \quad (5).$$

Bezogen auf den Umkehrpol als Koordinatenanfangspunkt wird die Spannungsfunktion

$$F' = a_0 + b_0 (r'^2 + 2 r' \cos\varphi + 1) + \tfrac{1}{2} c_0 \lg (r'^2 + 2 r' \cos\varphi + 1) + \tfrac{1}{2} d_0 (r'^2 + 2 r' \cos\varphi + 1) \lg (r'^2 + 2 r' \cos\varphi' + 1) \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Durch Rückkehrung erhält man

$$F = a_0 r_1^2 + b_0 r_2^2 + \tfrac{1}{2} c_0 r_1^2 (\lg r_2^2 - \lg r_1^2) + \tfrac{1}{2} d_0 r_2^2 (\lg r_2^2 - \lg r_1^2) \quad . \quad (7),$$

worin a_0 und b_0 den Gl. (4) und (5) zu entnehmen sind.

Die gleichmittlichen (konzentrischen) Kreise des Kreisringes gehen in die Kreise des Kreisbüschels über; diese haben unveränderliche Normalbelastung. Der Kreis um P_1 vom Durchmesser $d_1 = \frac{1}{r_a + 1} + \frac{1}{r_a - 1}$, der dem äußeren Kreise des Kreisringes entspricht, ist unbelastet. Je nach Wahl des Verhältnisses der Beiwerte c_0 und d_0 erhält man einen weiteren unbelasteten Kreis um P_2, während ihr endgültiger Wert durch die Spannung p im Unendlichen bestimmt ist.

Sind die Kreise um P_1 und P_2 vom gleichen Durchmesser, so wird $\frac{c_0}{d_0} = -1$ und

$$F = \tfrac{1}{2} d_0 \left\{\left(r_a - \frac{1}{r_a}\right)^2 r_1^2 + (2 r_1 \cos\varphi_1 - 1) \lg r_1^2 + (2 r_2 \cos\varphi_2 - 1) \lg r_2^2 \right. \quad . \quad (8).$$

Glieder ersten Grades und Unveränderliche sind hierbei vernachlässigt.

Die Spannungen σ_y für die Punkte der x_1-Achse werden:

$$\sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F(r_1 \varphi_1)}{\partial r_1^2}\right)_{\varphi_1 = 0} = d_0 \left\{\left(r_a - \frac{1}{r_a}\right)^2 + \frac{4}{r_1} + \frac{2}{r_1^2} + \frac{4}{-r_2} + \frac{2}{r_2^2}\right\}$$

$$= p \left[1 + \frac{2}{\left(r_a - \frac{1}{r_a}\right)^2} \left(\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{-r_2} + \frac{1}{r_2^2}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Diese Lösung ist auf anderem Wege von Herrn Professor Pöschl gefunden[1]; sie stellt jedoch, wie ich nachwies, nur eine Scheinlösung der gestellten Aufgabe dar, da dieser Spannungszustand nur bei einer bestimmten Vorspannung der unbelasteten Scheibe auftreten kann[2]. Dies gilt auch für die allgemeinere Lösung, Gl. (7), infolge des Auftretens der Glieder $r_1^2 \lg r_1^2$ und $r_1 \cos\varphi_1 \lg r_1^2$.

2. Herstellung der richtigen Lösung. Um nun die richtige Lösung zu finden, betrachte ich die bekannte Lösung für die unendliche Scheibe mit nur einem Kreisloche vom Durchmesser d. Die Airysche Spannungsfunktion hierfür bei allseitigem Zug im Unendlichen lautet

$$F = p \left(r_1^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \lg r_1^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

und für den Fall eines Zuges im Unendlichen in Richtung der y-Achse und eines gleich großen Druckes in Richtung der x-Achse

$$F = p \cos 2\varphi_1 \left[r_1^2 - 2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^4 r_1^{-2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Beachtenswert sind in den Lösungen Gl. (10) und (11) die Glieder mit $\lg r_1^2$ und $r_1^2 \cos 2\varphi_1$, da sie bei einer Umkehrung Unstetigkeitspunkte für die Funktion F' ergeben.

Ich mache nun für die Scheibe mit allseitigem Zug im Unendlichen und zwei gleich großen, unbelasteten Kreislöchern den Ansatz

$$F' = \lg r_1 + \lg r_2 + F_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

---

[1]) Diese Zeitschr. 1, 1921, S. 174—180.

[2]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 185—187.

Hier ist F_e eine noch zu findende Ergänzungsfunktion. Für den allgemeinen Fall von zwei verschieden großen Löchern sind die Glieder $\lg r_1$ und $\lg r_2$ mit verschieden großen Beiwerten zu versehen. Durch Umkehrung erhält man

$$F' = -\, r'^2 \lg r'^2 + {}^1/_2 r'^2 \lg (r'^2 - 2\, r' \cos \varphi' + 1) + F_e' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Die Umkehrung gibt eine Kreisringfläche mit den Halbmessern r_i und $r_a = \frac{1}{r_i}$. Im Umkehrpole P' innerhalb der Kreisringfläche hat die Funktion F' einen Unstetigkeitspunkt, der durch das erste Glied der Funktion gegeben ist.

Auf den Mittelpunkt des Kreisringes als Koordinatenanfangspunkt bezogen, lautet die Funktion

$$F' = ((x+1)^2 + y^2)\, \{{}^1/_2 \lg (x^2+y^2) - [\lg (x+1+iy) + \lg (x+1-iy)]\} + F_e' \quad (14).$$

Durch Zerlegung des zweiten und dritten logarithmischen Gliedes in Reihen von $(x+iy)^n$ und $(x-iy)^n$ mit positiven Werten von n erhält man

$$F' = [(x+1)^2 + y^2] \left\{ {}^1/_2 \lg (x^2+y^2) - \begin{bmatrix} (x+iy) - {}^1/_2 (x+iy)^2 + \ldots\ldots \\ (x-iy) - {}^1/_2 (x-iy)^2 + \ldots\ldots \end{bmatrix} \right\} + F_e'$$

$$= (r^2 + 1 + 2\, r \cos \varphi)\, [\lg r - 2\, (r \cos \varphi - {}^1/_2 r^2 \cos 2\varphi + {}^1/_3 r^3 \cos 3\varphi \ldots\ldots)] + F_e'$$

$$= (r^2+1) \lg r - 2\, r^2 + 2 \cos \varphi\, (r \lg r - r - {}^1/_2 r^3)$$

$$- \sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n \cos n\varphi \left[\frac{r^n}{n\,(n-1)} - \frac{r^{n+2}}{n\,(n+1)} \right] + F_e' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Durch Zerlegung derselben logarithmischen Glieder in Reihen von $(x+iy)^{-n}$ und $(x-iy)^{-n}$ erhält man ebenso

$$F' = [(x+1)^2 + y^2] \left\{ {}^1/_2 \lg (x^2+y^2) - \lg (x^2+y^2) - \begin{bmatrix} (x+iy)^{-1} - {}^1/_2 (x+iy)^{-2} + \ldots \\ (x-iy)^{-1} - {}^1/_2 (x-iy)^{-2} + \ldots \end{bmatrix} \right\}$$

$$+ F_e' = (r^2 + 1 + 2\, r \cos \varphi)\, [-\lg r - 2\, (r^{-1} \cos \varphi - {}^1/_2 r^{-2} \cos 2\varphi + {}^1/_3 r^{-3} \cos 3\varphi \ldots)] + F_e'$$

$$= -(r^2+1) \lg r - 2 + 2 \cos \varphi\, (-r \lg r - r - {}^1/_2 r^{-1})$$

$$- \sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n \cos n\varphi \left[\frac{r^{-n+2}}{n\,(n-1)} - \frac{r^{-n}}{n\,(n+1)} \right] + F_e' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die Reihenentwicklung nach Gl. (15) gilt für $r < 1$, die Reihenentwicklung nach Gl. (16) für $r > 1$.

Die Ergänzungsfunktion F_e' entspricht der in Gl. (2) gegebenen Reihe. Die Beiwerte c_0 und d_0, d_1 und e_1 sind hierin gleich null zu setzen. In der Rückkehrung geben die entsprechenden Glieder entweder Spannungszustände mit einer Vorspannung in der unbelasteten Scheibe oder eine Belastung jedes Lochrandes durch Kräfte, die nicht im Gleichgewichte sind. Die übrigen Beiwerte bestimme ich so, daß für die Punkte des äußeren Randes des Kreisringes die Funktionen F' und $\frac{\partial F'}{\partial r}$ gleich null werden. Es ist dann der äußere Rand unbelastet, und in der Rückkehrung erhält man nach Gl. (1) ebenfalls einen unbelasteten Rand des Loches um P_1. Für die Punkte des inneren Randes des Kreisringes muß die Belastung mindestens eine gleichmäßige sein, F' und $\frac{\partial F'}{\partial r}$ also nur Glieder ohne φ und mit $\cos \varphi$ enthalten und der Ausdruck $\left(F' - \frac{\partial F'}{\partial r}\right)$ einen Festwert geben.

In der Rückkehrung erhält man dann ebenfalls einen unbelasteten Lochrand um P_2, da der Ansatz, Gl. (12), für r_1 und r_2 gleich war. Mit den so bestimmten Beiwerten lautet die Funktion F':

$$F' = \Bigg[-(r^2+1) \lg r - 2 + \left(\lg r_a - \frac{r_a^2+1}{2} + 2 \right) + \left(\frac{r_a^2+1}{2\, r_a^2} + \lg r_a \right) r^2 \Bigg]$$

$$+ 2 \cos \varphi \left[-r \lg r - r - {}^1/_2 r^{-1} + \left(\lg r_a + {}^1/_2 + \frac{1}{r_a^2+1} \right) r + \frac{1}{2\,(r_a+1)} (r^3 + r^{-1}) \right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n\, 2 \cos n\varphi \left[-\frac{r^{-n+2}}{n\,(n-1)} + \frac{r^{-n}}{n\,(n+1)} + \frac{-\frac{r_a^{\,0}}{n} + \frac{r_a^{\,2}}{n-1} - \frac{r_a^{-2n}}{n\,(n-1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n\,(r_a^2 - r_a^{-2})} (r^n + r^{-n+2}) \right.$$

$$\left. + \frac{-\frac{r_a^{\,0}}{n} - \frac{r_a^{-2}}{n+1} + \frac{r_a^{-2n}}{n\,(n+1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n\,(r_a^2 - r_a^{-2})} (r^{n+2} + r^{-n}) \right] \quad (17).$$

Hierbei ist die Form der Funktion für $r > 1$, Gl. (16), genommen. Die in den eckigen Klammern rechtsstehenden Glieder bilden die Funktion F_e'.

Die tangentiale äußere Randspannung wird

$$\sigma_t' = \left(\frac{\partial^2 F'}{\partial r'^2}\right)_{r=r_a} = -2(1-r_a^{-2})\left\{1 + 4\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n \cos n\varphi \frac{r_a^n - r_a^{-n}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})}\right\} \quad (18).$$

Durch Rückkehrung erhält man die gesuchte Funktion F. Für die verschiedenen Glieder von F_e' gelten für die Rückkehrung folgende Beziehungen:

1. $F_{e1}' = 2(-1)^n r^n \cos n\varphi \equiv (-1)^n [(x+iy)^n + (x-iy)^n] \equiv (-1)^n [(x'-1+iy')^n + (x'-1-iy')^n] \equiv 2\left[1 - \binom{n}{1} r' \cos\varphi' + \binom{n}{2} r'^2 \cos 2\varphi' \ldots\ldots + (-1)^n r'^n \cos n\varphi'\right]$;

Rückkehrung:

$$F_{e1} = 2r_1^2\left[1 - \binom{n}{1} r_1^{-1} \cos\varphi_1 + \binom{n}{2} r_1^{-2} \cos 2\varphi_1 \ldots\ldots + (-1)^n r_1^n \cos n\varphi_1\right].$$

2. $F_{e2}' = 2(-1)^n r^{n+2} \cos n\varphi = 2(r'^2 - 2r'\cos\varphi' + 1)\left[1 - \binom{n}{1} r' \cos\varphi' + \binom{n}{2} r'^2 \cos 2\varphi' \ldots\ldots + (-1)^n r'^n \cos n\varphi'\right]$;

Rückkehrung:

$$F_{e2} = 2r_2^2\left[1 - \binom{n}{1} r_1^{-1} \cos\varphi_1 + \binom{n}{2} r_1^{-2} \cos 2\varphi_1 \ldots\ldots + (-1)^n r_1^n \cos n\varphi_1\right].$$

3. $F_{e3}' = 2(-1)^n r^{-n} \cos n\varphi \equiv (-1)^n\left[\left(\frac{1}{x+iy}\right)^n + \left(\frac{1}{x-iy}\right)^n\right]$
$\equiv (-1)^n\left(\frac{x'+iy'}{x'-1+iy'} - 1\right)^n + \left(\frac{x'-iy'}{x'-1-iy} - 1\right)^n\Big] \equiv \left[1 - \binom{n}{1}\left(\frac{x'+iy'}{x'-1+iy'}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{r'+iy'}{x'-1+iy'}\right)^2 \ldots\ldots\right] + \left[1 - \binom{n}{1}\left(\frac{x'-iy'}{x'-1-iy'}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{x'-iy'}{x'-1-iy'}\right)^2 \ldots\ldots\right]$;

Rückkehrung:

$$F_{e3} = r_1^2\begin{bmatrix} 1 - \binom{n}{1}(1-x_1+iy_1)^{-1} + \binom{n}{2}(1-x_1+iy_1)^{-2} \ldots. \\ 1 - \binom{n}{1}(1-x_1-iy_1)^{-1} + \binom{n}{2}(1-x_1-iy_1)^{-2} \ldots. \end{bmatrix}$$
$$\equiv 2r_1^2\left[1 - \binom{n}{1} r_2^{-1} \cos\varphi_2 + \binom{n}{2} r_2^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\ldots + (-1)^n r_2^{-n} \cos n\varphi_2\right].$$

4. $F_{e4}' = 2(-1)^n r^{-n+2} \cos n\varphi$;

Umformung wie für F_{e3}';

Rückkehrung:

$$F_{e4} = 2r_2^2\left[1 - \binom{n}{1} r_2^{-1} \cos\varphi_2 + \binom{n}{2} r_2^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\ldots + (-1)^n r_2^{-n} \cos n\varphi_2\right].$$

Hiernach erhält man die Funktion F:

$$F = \lg r_1 + \lg r_2 - \tfrac{1}{2}\frac{r_a^4 - r_a^{-4}}{(r_a + r_a^{-1})^2} r_1^2 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^{-2}}{n+1} + \frac{r_a^{-2n}}{n(n+1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})}$$
$$\left\{r_2^2\left[1 - \binom{n}{1} r_1^{-1} \cos\varphi_1 + \binom{n}{2} r_1^{-2} \cos 2\varphi_1 \ldots\right] + r_1^2\left[1 - \binom{n}{1} r_2^{-1} \cos\varphi_2 + \binom{n}{2} r_2^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\right]\right\}$$
$$+ 2\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^2}{n-1} - \frac{r_a^{-2n}}{n(n-1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})} \left\{r_1^2\left[1 - \binom{n}{1} r_1^{-1} \cos\varphi_1 + \binom{n}{2} r_1^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\ldots\right]\right.$$
$$\left. + r_2^2\left[1 - \binom{n}{1} r_2^{-1} \cos\varphi_2 + \binom{n}{2} r_2^{-2} \cos 2\varphi_2 \ldots\right]\right\} \quad \ldots \quad (19).$$

Die Spannung im Unendlichen wird für alle Richtungen

$$p = -\frac{r_a^4 - r_a^{-4}}{(r_a + r_a^{-1})^2} + 4\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^{-2}}{n+1} + \frac{r_a^{-2n}}{n(n+1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})} + 4\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{-\frac{r_a^0}{n} + \frac{r_a^2}{n-1} - \frac{r_a^{-2n}}{n(n-1)}}{r_a^{2n} - r_a^{-2n} + n(r_a^2 - r_a^{-2})} \quad (20).$$

Die Spannung am Rande der Löcher findet man am leichtesten mit Hilfe der Beziehung (1) aus der Randspannung σ_t' der Umkehrung Gl. (18). Und zwar entsprechen den Punkten Q_1, Q_2 und Q_3 des Lochrandes in Abb. 3 die Punkte Q_1', Q_2' und Q_3' des Kreisringes in Abb. 4. Es wird

für Q_1': $\varphi = 0,\ r' = r_a + 1,$

für Q_2': $\sin\varphi = \frac{r_a^2 - 1}{r_a^2 + 1},\quad r' = \frac{r_a^2 - 1}{\sqrt{r_a^2 + 1}},$

für Q_3': $\varphi = \pi,\quad r' = r_a - 1.$

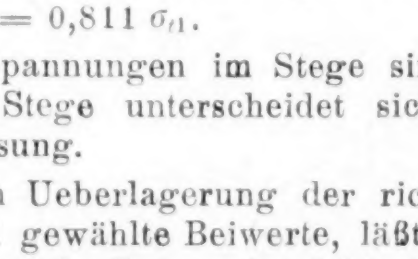


Abb. 3

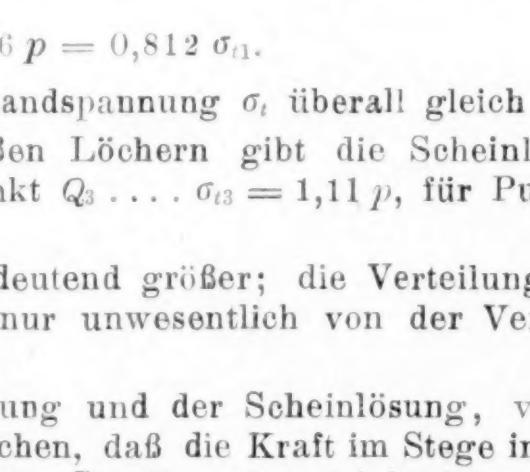


Abb. 4

3. Zahlenbeispiel. Ich führte die Rechnung durch für $r_a = 2$; dem entspricht eine unendliche Scheibe mit zwei Löchern vom Durchmesser $d = \frac{4}{3}$ und einer Stegbreite $b = \frac{1}{3}$. Die Stegbreite ist viermal kleiner als der Durchmesser der Löcher. Ich erhielt die Spannung im Unendlichen

$$p = -2{,}125$$

und die Tangentialspannungen

für Q_1' . . . . $\sigma_{t1}' = -0{,}8622$, für Q_1 . . . . $\sigma_{t1} = -7{,}760 = 3{,}65\,p$,
für Q_2' . . . . $\sigma_{t2}' = -1{,}9804$, für Q_2 . . . . $\sigma_{t2} = -3{,}565 = 1{,}68\,p$,
für Q_3' . . . . $\sigma_{t3}' = -5{,}012$, für Q_3 . . . . $\sigma_{t3} = -5{,}012 = 2{,}38\,p$.

In der Mitte des Steges für den Punkt Q_m fand ich unmittelbar aus Gl. (19) die Spannung in y-Richtung

$$\sigma_m = -6{,}297 = 2{,}96\,p = 0{,}812\,\sigma_{t1}.$$

Bei einem einzelnen Loche würde die Randspannung σ_t überall gleich $2p$ sein.

Für die Scheibe mit zwei gleich großen Löchern gibt die Scheinlösung nach Gl. (19) für Punkt Q_1 . . . . $\sigma_{t1} = 10\,p$, für Punkt Q_3 . . . . $\sigma_{t3} = 1{,}11\,p$, für Punkt Q_m . . . . $\sigma_m = 8{,}11\,p = 0{,}811\,\sigma_{t1}$.

Die Spannungen im Stege sind hier bedeutend größer; die Verteilung der Spannungen im Stege unterscheidet sich jedoch nur unwesentlich von der Verteilung der richtigen Lösung.

Durch Ueberlagerung der richtigen Lösung und der Scheinlösung, vermehrt um entsprechend gewählte Beiwerte, läßt sich erreichen, daß die Kraft im Stege in y-Richtung gleich Null wird Dem entspricht eine unendliche Scheibe mit zwei kreisrunden Löchern und einem zerschnittenen Stege, wobei die Schnittlinien bei dicht aneinander liegenden Löchern fast unbelastet sind. Für obiges Beispiel wird für die Punkte Q_1 und Q_m die Spannung $\sigma_t \sim 0$, während die größte Spannung $\sigma_{t3} = 3{,}68\,p$ im Punkte Q_3 auftritt.

Vergrößert man die Löcher so, daß der Steg ständig schmäler wird, so nähert sich der Wert r_a dem Werte 1. Die Berechnung der Spannungen wird immer schwieriger, da die hierzu notwendigen Reihen nur langsam abnehmen. Hierfür läßt sich auf folgende Weise eine Näherungslösung finden.

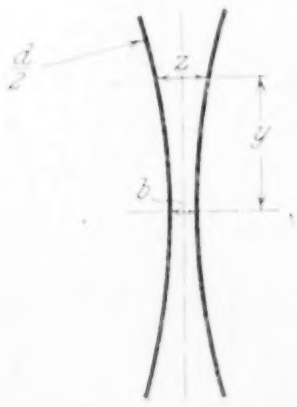


Abb. 5

Die beiden Löcher vom Durchmesser d liegen, Abb. 5, dicht aneinander, so daß dazwischen ein sehr schmaler Steg bleibt, dessen Breite in der engsten Stelle gleich b ist. Der Polabstand ist hier nicht weiter gleich der Längeneinheit zu setzen. Zerschneidet man den Steg, so klafft er um die Länge $\lambda = \frac{C p d}{E}$ auseinander. Der Beiwert C ist hierin unabhängig von der Breite b des Steges, da diese im Verhältnis zu den Lochdurchmessern gering ist. Um den Steg wieder zu verbinden, muß in ihm eine Kraft P_y in y Richtung wirken. Die veränderliche Breite des Steges ist in nicht zu weiter Entfernung von der x-Achse

$$z \sim b + \frac{y^2}{d}.$$

Die Dehnung in y-Richtung wird

$$\varepsilon_y = \frac{P_y}{z\,E} = \frac{P_y}{E}\,\frac{1}{b + \frac{y^2}{d}}.$$

Die Verlängerung beider Stegzipfel beträgt

$$\lambda = \int_{y_u}^{y_0} \varepsilon_y\, d_y = \frac{P_y}{E}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\ \operatorname{arctg}\ \sqrt{\frac{1}{b\,d}}\,y\right]_{y_u}^{y_0}.$$

Setzt man als Grenzen für die Integration annäherungsweise $-\infty$ und $+\infty$ ein, so erhält man

$$\lambda = \pi\sqrt{\frac{d}{b}}\,\frac{P_y}{E};$$

hieraus die Stegkraft

$$P_y = \frac{E\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{b}{d}} = \frac{1}{\pi}\,C p \sqrt{b d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

und die Spannung in der schmalsten Stelle des Steges

$$\sigma_y = \frac{P_y}{b} = \frac{1}{\pi}\,C p \sqrt{\frac{d}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Der Beiwert C muß einem durchgerechneten Beispiele entnommen werden; für $r_a = 1{,}5$, $b = {}^1/_{12}\,d$, erhielt ich $C \sim 5$.

Mit abnehmender Stegbreite bei gleichbleibendem Lochdurchmesser nimmt die Kraft im Stege bis null ab, während die Spannung bis ins Unendliche steigt. Für sich berührende Löcher bleibt es demnach gleich, ob der Steg verbunden ist oder nicht. Die größte Spannung tritt dann im Punkte Q_3, Abb. 3, auf und erreicht einen Wert zwischen $2{,}38\,p$ und $3{,}68\,p$; diese Werte sind dem durchgerechneten Beispiele mit $r_a = 2$ entnommen.

Für die Scheibe mit zwei kreisrunden Löchern und einem in x- bezw. y-Richtung wirkenden Zug im Unendlichen ist an Stelle des Ansatzes Gl. (12) folgender Ansatz zu wählen:

$$F = r^2 \cos 2\varphi + F_e,$$

desgleichen für beliebig gerichteten Zug:

$$F = r^2 \cos 2\,(\varphi + \alpha) + F_e.$$

Zum Schluß ist die gefundene Lösung für allseitigen Zug zu überlagern.

Die weitere Durchrechnung entspricht der obigen und bietet keine weiteren Schwierigkeiten.

Auch für verschieden große Löcher, darunter ebenfalls für den Fall der Halbscheibe mit einem Loche dicht am Rande läßt sich der Berechnungsgang anwenden.

Aus dem durchgerechneten Beispiele ist als beachtenswert hervorzuheben, daß bei dicht aneinander liegenden Löchern die Spannung im Stege ziemlich gleichmäßig verteilt ist. Während am Rande eines einzelnen Loches eine örtliche Erhöhung die Spannung bei allseitigem Zuge auf das Doppelte, bei einseitig gerichtetem Zuge auf das Dreifache der durchschnittlichen Zugspannung entsteht, wird eine Reihe von dicht aneinander liegenden Löchern eine geringere Erhöhung hervorrufen; nur ist dann selbstverständlich bei Berechnung der durchschnittlichen Spannung die Verringerung der übertragenden Scheibenbreite durch die Löcher zu berücksichtigen. Für eine allseitig gezogene Scheibe mit einer Reihe von gleich großen Löchern läßt sich die Abweichung der höchsten Spannung am Rande der Löcher von der durchschnittlichen Spannung zwischen denselben annähernd nach Gl. (9) berechnen.

Über ein Problem der Stromleitung.

Von **F. NOETHER** in Breslau.

Im ersten Teil dieses Aufsatzes[1]) stellt L. Lichtenstein folgende Aufgabe, die in ähnlicher Form in der Hochspannungstechnik vielfach eine Rolle spielt: Ein unbelasteter Einphasenleiter S ist in der Mitte über eine Wechselstromquelle geerdet, die seine Wechselspannung gegen Erde $= E \cos \omega t$ macht. Der Wechselspannung entspricht eine Aufladung des Leiters und, ebenso groß, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, der Erdoberfläche. Zu bestimmen war zunächst die Ladungsverteilung auf der Erdoberfläche und die dem Wechsel der Ladung entsprechende Strömung in der Erde, die sich von der Erdungsstelle aus ausbreitet und in der Erdoberfläche endet. Dieser Teil der Aufgabe, der in der Aufstellung eines Strömungspotentials besteht, war durch den ersten Schritt einer sukzessiven Näherung, die von der Ladungsverteilung einer Gleichspannung ausging, zu lösen. Die weitere Aufgabe ist die Bestimmung des zu dieser Strömung gehörigen Ohmschen Widerstandes der Erde. Für Erdungszwecke interessiert dabei die Frage, ob dieser Widerstand wesentlich von der Lage und Ausdehnung des Leiters mit bedingt wird oder hauptsächlich nur von der Gestalt der Erdung selbst abhängt, die der Einfachheit halber als eine kleine metallische Halbkugel angenommen war.

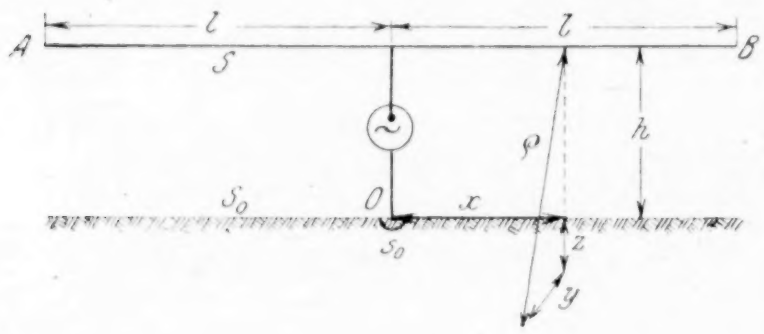


Abb. 1

1. Reduktion des Strompotentials ψ. Das Strömungspotential setzte sich zusammen aus dem Potential dieser Punktquelle (radiale Ausströmung) und einem Doppelintegral, genommen über Elementarpotentiale entgegengesetzten Vorzeichens, die von den Ladungen an der Erdoberfläche herrühren [L, Gl. (36)]. Unsere erste Aufgabe ist es, dieses Doppelintegral in einfachere Gestalt zu bringen. Das gelingt in der Tat sehr leicht, und zwar zufolge des Umstandes, daß wir es mit der ebenen Oberfläche der leitenden Erde zu tun haben. Für eine gekrümmte Oberfläche wäre eine entsprechende Vereinfachung nicht möglich.

Es bezeichne wie oben δ die Flächendichte der Ladungen im Punkte ξ, η der Erdoberfläche für den Gleichstromfall, also $\delta\, \omega \cos \omega t$ die der elementaren Strömungsquellen; dann haben die entsprechenden Strompotentiale mit Rücksicht auf die begrenzende Erdoberfläche (S_0) die Form:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\delta\, \omega \cos \omega t\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + Z^2}},$$

gleich dem Strompotential der Quellen doppelter Intensität in unbegrenztem, leitendem Medium. Andererseits war die Ladungsdichte δ bestimmt aus der eingangs behandelten elektrostatischen Aufgabe. Sie kann aufgefaßt werden als diejenige Ladungsverteilung, deren elektrostatisches Potential zusammen mit dem primären elektrostatischen Potential des Leiters S das Potential in der Erde konstant, und zwar 0, macht. Also:

$$0 = \int_{S_0} \frac{\delta\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + z^2}} + q \int_{-l}^{+l} \frac{dx}{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2 + (Z-h)^2}}.$$

So läßt sich gerade das uns interessierende Doppelintegral auf das einfache Integral zurückführen, das bereits oben [L, Gl. (2)] berechnet war. Mit $q = C E_0$ [nach L, Gl. (16)] ergibt sich:

$$\psi = \frac{2\, l\, C \omega\, E_0 \cos \omega t}{2\pi \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}} + \frac{\omega \cos \omega t}{2\pi} \int_{S_0} \frac{\delta\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2 + Z^2}}$$

$$= \left[\frac{2\, l}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} - \ln \frac{(l-X) + \sqrt{(X-l)^2 + Y^2 + (Z-h)^2}}{-(l+X) + \sqrt{(X+l)^2 + Y^2 + (Z-h)^2}} \right] \frac{C \omega\, E_0 \cos \omega t}{2\pi} \qquad (1).$$

[1]) Nach Verabredung mit Prof. Lichtenstein habe ich diese Fortführung seiner in dieser Zeitschr. 1, 1921, S. 42 bis 47 veröffentlichten Arbeit übernommen. Der erste Teil wird mit »L« zitiert.

Man kann diese einfache Reduktion auch so deuten: Die Erdströmung setzt sich zusammen aus der von der punktförmigen (bezw. halbkugelförmigen) Quelle radial ausströmenden und einer weiteren entgegengesetzter Phase, die sich gerade so verhält, als ob sie von gleichmäßig längs des Leiters verteilten Quellen in homogen leitendem Medium ausströmte. Diese Strömung ist aber längs der begrenzenden Erdoberfläche abgeschnitten bezw. setzt sich in der Luft nur als Verschiebungsströmung fort. Schreiben wir abkürzend für den ganzen Kapazitätsstrom: $2\,l\,C\,\omega\,E_0 \cos \omega\,t = J$, so wird:

$$\mathfrak{P} = \frac{J}{2\,\pi\,R} - \frac{J}{4\,\pi\,l} \ln \frac{(l-X) + \sqrt{(X-l)^2 + Y^2 + (Z-h)^2}}{-(l+X) + \sqrt{(X-l)^2 + Y^2 + (Z-h)^2}} = \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2 \quad . \quad . \quad (2).$$

Das Potential $\mathfrak{P}_2$ geht für alle Punkte, deren Abstand $R' = \sqrt{X^2 + Y^2 + (Z-h)^2}$ vom Leitungsmittelpunkt groß ist gegenüber der Leitungslänge $2\,l$, zu Null wie $\frac{J}{2\,\pi\,R'}$. Das ganze Potential $\mathfrak{P}$ verhält sich also in großer Entfernung wie

$$\frac{J}{2\,\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

es verschwindet wie das Potential einer Doppelquelle in der Ordnung $\frac{1}{R^2}$. Der am Ende des ersten Aufsatzes geforderte Eindeutigkeitsbeweis ist auf Grund dieser Tatsache in bekannter Weise zu führen. Abb. 2 zeigt den nach (2) unter speziellen Zahlenwerten berechneten Erdstromverlauf in der Vertikalebene durch den Leiter S.

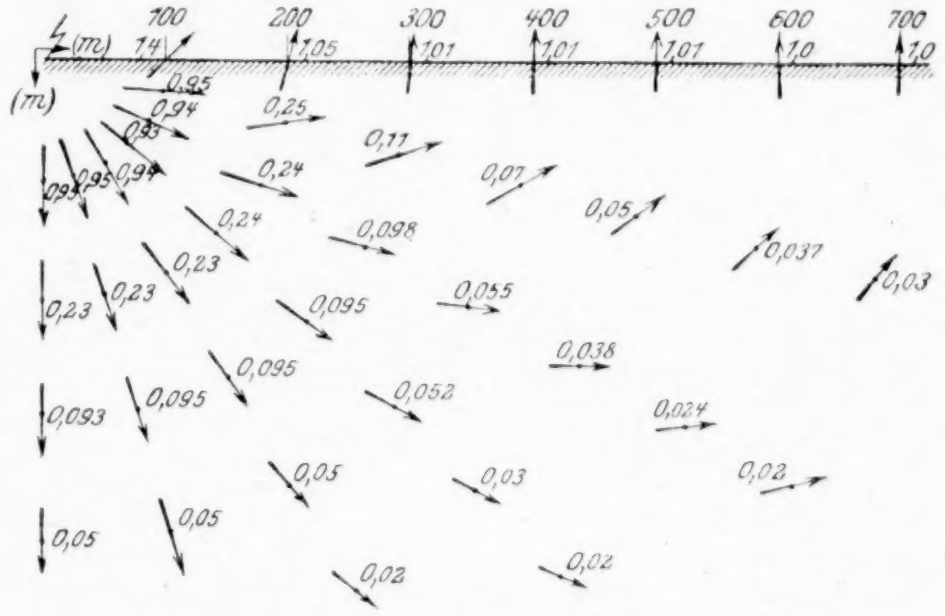


Abb. 2

2. Widerstand der Erdströmung. Nach dieser Vorbereitung macht es keine wesentliche Schwierigkeit mehr, den Ohmschen Widerstand der Strömung aufzustellen und mit praktisch ausreichender Genauigkeit zu berechnen. Wenn es sich um einen linearen stromdurchflossenen Leiter handelt, so ist der Widerstand nach dem Ohmschen Gesetze definiert: $WJ = E$, wobei E der Spannungsabfall im Leiter. Diese Definition behält auch bei körperlicher Strömung solange ihre Gültigkeit, als 2 Punkte existieren, an denen jeweils der ganze Strom konzentriert ist, oder allgemeiner 2 vollständige Niveauflächen als Begrenzung des Strömungsgebiets bekannt sind, zwischen denen der Spannungsabfall gemessen werden kann. Für unseren Fall sind aber solche Voraussetzungen nicht erfüllt, und damit versagt die Definition nach dem Ohmschen Gesetz. An ihre Stelle muß eine Definition auf Grund der verbrauchten Leistung A treten, nämlich:

$$A = W\,J^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Dabei ist der ganze Strom J wie oben bekannt, der Leistungsverbrauch ist durch das über das ganze Strömungsgebiet erstreckte Integral zu definieren (i = Stromdichte, f = elektrische Feldstärke, λ = Leitfähigkeit des Erdbodens $\approx 10^{-4}$ ohm^{-1} cm^{-1} $= 10^{-13}\,c\,g\,s$):

$$A = \int_v \bar{i}\,\bar{f}\,d\,v = \frac{1}{\lambda}\int_v (\mathrm{grad}\ \mathfrak{P})^2\,d\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Den Strömungsbereich denken wir uns durch die kleine erdende Halbkugel (s_0) vom Radius r_0 um den Punkt $R = 0$, im übrigen durch die Erdoberfläche (S_0) und eine Halbkugel vom Radius ∞ begrenzt. Dann wird nach bekannter Umformung mit Rück-

sicht auf das oben angegebene Verhalten von $\mathfrak{P}$ im Unendlichen A durch das Oberflächenintegral dargestellt:

$$A = \frac{1}{\lambda} \int_{s_0 + S_0} \mathfrak{P} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, d\, s \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4').$$

Gemäß (2) zerlegen wir:

$$A = \frac{1}{\lambda} \int_{s_0} (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2) \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} \, d\, s_0 - \frac{1}{\lambda} \int_{S_1} (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2) \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} \, d\, S_0 = A_1 - A_2 \quad . \quad . \quad (5).$$

Bei dieser Zerlegung ist berücksichtigt, daß längs S_0 gilt: $\frac{\partial \Psi_1}{\partial n} = 0$ und daß für den Teil A_2 das Gebiet s_0 ganz unwesentlich ist. Es wird, wenn r_0 hinreichend klein neben h gewählt ist (praktisch kommt etwa $r_0 = \frac{h}{100}$ in Betracht, so daß $\mathfrak{P}_2$ längs s_0 als konstant angesehen werden kann):

$$A_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{J^2}{2\,\pi\, r_0} - \frac{J^2}{4\,\pi\, l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + h^2}}{-l + \sqrt{l^2 + h^2}} \approx \frac{1}{\lambda} \frac{J^2}{2\,\pi\, r_0} \left(1 - \frac{r_0}{l} \ln \frac{2\,l}{h}\right) \quad . \quad . \quad (6).$$

Bei der letzten Näherung ist $h << l$ berücksichtigt. Der Ausdruck A_1 weicht, da natürlich erst recht $r_0 << l$, sehr wenig von der Leistung ab, die der radialen Ausströmung aus der Halbkugel r_0 entspricht.

Nicht so einfach ist das Integral A_2 in (5) auszuwerten. Es wird sich aber zeigen, daß dieses ganze Integral nur klein wird neben A_1. Zur ersten Vereinfachung der Berechnung können wir uns bei der Integration beschränken auf einen Streifen der Erdoberfläche zu beiden Seiten des Leiters S, dessen Breite klein ist im Vergleich zur Länge $2l$ des Leiters, dagegen groß gegen h (d. h. $h << \varrho = \sqrt{Y^2 + (Z-h)^2} << 2l$). In einem solchen Streifen wird nämlich, bis auf Glieder höherer Ordnung in $\frac{\varrho}{l}$:

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{J}{4\,\pi\, l} \ln \frac{l - X + (l-X)\left[1 + {}^1\!/_2 \frac{\varrho^2}{(l-X)^2}\right]}{{}^1\!/_2 \frac{\varrho^2}{l+X}} \approx \frac{J}{2\,\pi\, l} \ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{\varrho} \quad . \quad . \quad (7).$$

Es wird daher in dieser Näherung

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial n} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = \frac{J}{2\,\pi\, l} \frac{h}{\varrho^2},$$

während für Abstände $\varrho > l$ nach der strengen Formel die Abnahme mit ϱ^{-3} erfolgt. In dem Integral (5) ergeben dann die Gebiete des Streifens, in denen $\varrho >> h$, höchstens noch Beiträge von der Größenordnung $\frac{J}{2\,\pi\, l} \frac{h}{\varrho} \ln \varrho$, die klein sind im Verhältnis zu dem ganzen Wert A_2. Mit anderen Worten: Wir können unter der Voraussetzung $h << l$ den Näherungsausdruck (7) für $\mathfrak{P}_2$ bis zu beliebig großen ϱ hin anwenden.

Etwas Vorsicht erfordert dann nur noch das Verhalten der Integranden in der Nähe der Leiterenden A, B. Durch eine Betrachtung, die der oben (L, S 46) durchgeführten analog ist, erkennt man aber, daß auch diese Gebiete, sowie noch mehr die außerhalb der Leiterenden A, B liegenden (d. h. $X > l$, $X < -l$) nur relativ sehr kleine Beiträge zum ganzen Integral A_2 liefern. Wir begrenzen daher die ganze Ebene $z = 0$ durch die beiden Geraden $X = \pm l$ und verwenden in dem so abgegrenzten Gebiet $-l < X < +l$ den Näherungsausdruck (7) für $\mathfrak{P}_2$. Also:

$$A_2 = \frac{1}{\lambda} \int_{-l}^{+l} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{J}{2\,\pi\, R} - \frac{J}{2\,\pi\, l} \ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{\varrho}\right) \frac{J}{2\,\pi\, l} \frac{h}{\varrho^2} \, d\, Y \, d\, X$$

$$= \frac{J^2 h}{4\,\pi^2\, \lambda\, l} \int_{-l}^{+l} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{l} \ln \frac{2\sqrt{l^2 - H^2}}{h}\right) \frac{d\, Y \, d\, X}{\varrho^2} \quad (7').$$

Wir setzen hier:

$$\ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{\varrho} = \ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{h} + \ln \frac{h}{\varrho},$$

so daß zu berechnen ist:

$$A_2' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{2\sqrt{l^2 - X^2}}{h} \frac{d\,Y\,d\,X}{Y^2 + h^2} = \frac{\pi}{2\,h\,l}\int_{-l}^{+l} \ln \frac{4\,(l^2 - X^2)}{h^2}\, d\,X \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Durchführung der Integration auf elementarem Weg ergibt:

$$A_2' = \frac{2\,\pi}{h}\left(\ln \frac{4\,l}{h} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Ferner:

$$A_2'' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{h}{\varrho} \frac{d\,Y\,d\,X}{\varrho^2} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{h}{\sqrt{Y^2 + h^2}} \frac{d\,Y}{Y^2 + h^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln \frac{h}{Y + h\,i} + \ln \frac{h}{Y - h\,i}\right) \frac{d\,Y}{Y^2 + h^2} \quad (2).$$

Da hier der Integrand im Unendlichen wie $\frac{\ln y}{y^2}$ verschwindet, können wir den Integrationsweg in der komplexen Y-Ebene zu Schleifen um die Pole zusammenziehen, und zwar für den ersten Teil um den Pol $Y = +\,h\,i$, für den zweiten Teil um den Pol $Y = -\,h\,i$. Also:

$$A_2'' = 2\,\pi\,i\,\frac{\ln {}^1/_2\,i}{2\,h\,i} - 2\,\pi\,i\,\frac{\ln -{}^1/_2\,i}{-2\,h\,i} = \frac{2\,\pi}{h} \ln {}^1/_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Schließlich:

$$A_2''' = \int_{-l}^{+l}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,Y\,d\,X}{R\,\varrho^2} = \int_{-l}^{+l}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,Y\,d\,X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + h^2}} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{l}{|Y|}}{Y^2 + h^2}\, d\,Y \quad . \quad . \quad (3).$$

Wir machen nun Gebrauch davon, daß wegen des Nenners $Y^2 + h^2$ in diesem Integral nur solche Integrationsgebiete wesentlich sind, in denen $|Y|$ von der Größenordnung h, also sehr klein gegen l ist, können daher mit verschwindend kleinem Fehler setzen:

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{l}{|Y|} = \ln \frac{2\,l}{|Y|}.$$

Den Integrationsweg betrachten wir als längs der positiven und negativen reellen Achse verlaufend und schließen ihn durch einen kleinen Halbkreis in der oberen Halbebene um $y = 0$. Das ist gestattet, da das Integral über dem Halbkreis beliebig klein gemacht werden kann (Abb. 3). So ist

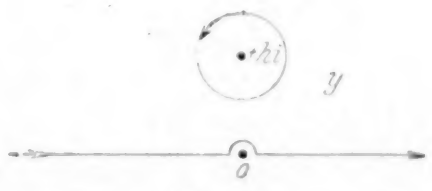


Abb. 3

längs der positiv reellen Achse: $\ln \frac{2\,l}{|Y|} = \ln \frac{2\,l}{Y}$,

» » negativ » » : $\ln \frac{2\,l}{|Y|} = \ln \frac{2\,l}{Y} + \pi\,i.$

Der Integrationsweg kann nun für den logarithmischen Teil des Integranden zu einer Schleife um den Punkt $Y = +\,h\,i$ zusammengezogen werden und ergibt so:

$$A_2''' = 2\int_{h\,i}^{\infty} \frac{\ln \frac{2\,l}{Y}}{Y^2 + h^2}\, d\,Y + 2\,\pi\,i\int_{-\infty}^{\circ} \frac{d\,Y}{Y^2 + h^2} = 2\,\pi\,i\,\frac{2\ln \frac{2\,l}{h\,i}}{2\,h\,i} + 4\ln i\,\frac{\pi}{2\,h} = \frac{2\,\pi}{h} \ln \frac{2\,l}{h} \quad (10).$$

Im ganzen bekommen wir nach (7) bis (10):

$$A_2 = \frac{J^2\,h}{4\,\pi^2\,\lambda\,l}\left[\frac{2\,\pi}{h} \ln \frac{2\,l}{h} - \frac{2\,\pi}{h}\left(\ln\left(\frac{4\,l}{h}\right) - 1\right) - \frac{2\,\pi}{h} \ln {}^1/_2\right] = \frac{J^2}{2\,\pi\,\lambda\,l} \quad . \quad (11).$$

(6) und (11) ergibt nun nach (5) die ganze Leistung:

$$A = A_1 - A_2 = \frac{J^2}{2\,\pi\,\lambda}\left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{l}\left(\ln \frac{2\,l}{h} + 1\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Der Widerstand der Strömung ist somit nach der obigen Definition (3):

$$W = \frac{A}{J^2} = \frac{1}{2\pi\lambda r_0} - \frac{1}{2\pi\lambda l}\left(\ln\frac{2l}{h} + 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Dies ist das gesuchte Resultat, dessen wesentlicher Inhalt nicht ohne weiteres vorauszusehen war. In der Formel (13) bezeichnet nämlich das erste Glied den Widerstand, den die Strömung bei radialer Ausbreitung aus der erdenden Elektrode (Halbkugel vom Radius r_0) findet oder, mit einer kurzen, in der Elektrotechnik üblichen Ausdrucksweise, den Erdungswiderstand dieser Elektrode. Bei anderen Erderformen würde an Stelle von r_0 eine andere, von den mittleren Dimensionen der Erdung abhängige Länge treten. Die Halbleiterlänge l ist aber unter allen Umständen äußerst groß gegen dieses r_0, und das gleiche gilt auch noch für $\frac{l}{\ln\frac{2l}{h}}$; es folgt daher, daß im Widerstand immer das erste, von der Umgebung des Einzelerders herrührende Glied das weit überwiegende ist. Die Anordnung der ganzen geerdeten Leitung hat auf den Widerstand nur äußerst geringen Einfluß, im Zusammenhang mit der geringen Erdstromdichte, wie sie z. B. auch Abb. 2 überall, außer in der unmittelbarsten Umgebung der Elektrode, zeigt. Für die praktische Anwendung erwächst daraus die Berechtigung, von einem bestimmten Widerstand des Einzelerders zu sprechen.

Prinzipiell aber ist daran festzuhalten, daß es sich um den Erdwiderstand handelt, der von der Anordnung des ganzen Netzes abhängt, da Fälle denkbar sind, in denen dieser Einfluß stärker wird. Das wäre z. B. der Fall, wenn nicht der ganze Erdboden, sondern nur eine dünne, durchfeuchtete Schicht über sehr trockenem Boden leitend ist. Aehnliche Voraussetzungen liegen der für hohe Frequenzen durchgeführten Untersuchung von A. Abraham (ds. Zeitschr. 2, 1922, S. 109 bis 131) zugrunde[1]). [164]

Zur Theorie der kleinen Schwingungen.[2])

Von **R. COURANT** in Göttingen.

Das Ziel der folgenden Ausführungen ist, die Aufmerksamkeit auf eine bisher kaum beachtete Minimum- bezw. Maximum-Minimum-Eigenschaft der Schwingungszahlen eines beliebigen mechanischen Systems zu lenken, das um eine stabile Gleichgewichtslage kleine Schwingungen ausführt. Diese Extremumeigenschaft beruht auf einer in **1** angegebenen Umsetzung bekannter Tatsachen aus der Theorie der quadratischen Formen in eine weniger bekannte[3]) Gestalt und ist deshalb von Wichtigkeit, weil sie gestattet, fast unmittelbar eine Reihe grundlegender (für die Anschauung übrigens durchaus plausibler) Sätze[4]) über das Verhalten der Schwingungszahlen bei Modifikationen des vorgelegten mechanischen Systems abzulesen. Als solche Modifikationen werden wir Auferlegung von Zwangsbedingungen und Veränderung der Massen oder der inneren Spannungen des Systems in Betracht ziehen. Insbesondere vergleichen wir in **2** zwei Systeme S und S' von endlich vielen Freiheitsgraden. Erlegen wir unter Festhaltung der kinetischen und der potentiellen Energie dem System S von n Freiheitsgraden r Zwangsbedingungen auf $(r < n)$, sodaß das neue System S' r Freiheitsgrade weniger als das alte hat, so ergibt sich, daß

---

[1]) Ueber verwandte Fragen s. auch den Vortrag von L. Lichtenstein: Erdstromfragen in Theorie und Praxis. Elektrotechnische Zeitschrift 1921, S. 447.

[2]) Man vergleiche zu der vorliegenden Arbeit eine ausführlichere Abhandlung des Verfassers »Ueber die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik«, Math. Ztschr. Bd. 7, S. 1 bis 57, wo die hier entwickelten Gedankengänge zum Teil bei wesentlich allgemeineren Problemstellungen Verwendung finden.

[3]) Vergl. E. Fischer, Monatshefte für Math. und Phys. Bd. 16, S. 245, sowie a. a. O. [1]), S. 19.

[4]) Man vergleiche zu diesen Sätzen Rayleigh, Theorie of sound, Band 1, Kap. IV, V.

der Grundton von S' nicht tiefer ist als der Grundton von S und nicht höher als der $(r+1)$te Oberton von S. Geht andererseits S' aus S dadurch hervor, daß bei ungeänderter potentieller Energie durch Vergrößerung einzelner Massen von S die Trägheit des Systems vergrößert wird, so zeigt sich, daß hierbei der Grundton und jeder Oberton fällt oder wenigstens nicht steigt. Bleibt schließlich umgekehrt die kinetische Energie von S ungeändert, während ein Teil der inneren Spannungen vergrößert wird, dann steigt der Grundton und jeder Oberton oder fällt wenigstens nicht. In **3** übertragen wir solche und ähnliche Betrachtungen auf Systeme von unendlich vielen Freiheitsgraden, für die entsprechende Sätze gelten; werden z. B. einer schwingenden Saite irgendwelche Zwangsbedingungen auferlegt, so können der Grundton und jeder Oberton nicht fallen usw. Diese Ueberlegungen weisen schließlich einen Weg, die Schwingungszahl hoher Obertöne asymptotisch zu berechnen.

Vorab sei der Leser noch in Kürze an die hier in Frage kommenden Tatsachen aus der Theorie der quadratischen Formen und an deren Zusammenhang mit der Lehre von den kleinen Schwingungen erinnert.

Die Bewegung eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden, das um eine stabile Gleichgewichtslage Schwingungen ausführt, wird beschrieben durch die Lagrangeschen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \xi_1}=-\frac{\partial U}{\partial \xi_1},\ \ldots,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial \xi_n}=-\frac{\partial U}{\partial \xi_n},\quad \dot{\xi}_h=\frac{d\xi_h}{dt}\ (h=1,\ldots,n).$$

Dabei charakterisieren die verallgemeinerten oder Lagekoordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die Abweichung des Systems von der Gleichgewichtslage $\xi_1=0, \ldots, \xi_n=0$ (z. B. sind im Falle des n-fachen Pendels für $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die n Ausschlagwinkel $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ zu nehmen), während die Funktion U die potentielle, die Funktion T die kinetische Energie des Systems darstellt. Sind die Schwingungen klein, so ist U als quadratische Form der Koordinaten ξ_h mit konstanten Koeffizienten a_{hk}, T als quadratische Form der Ableitungen $\dot{\xi}_h$ der Koordinaten nach der Zeit mit ebenfalls konstanten Koeffizienten b_{hk} anzusehen [1]):

$$U=\sum_{h,k} a_{hk}\,\xi_h\,\xi_k;\qquad T=\sum_{h,k} b_{hk}\,\dot{\xi}_h\,\dot{\xi}_k.$$

Diese Formen sind ihrer Natur nach positiv definit, die eine, weil die kinetische Energie wesentlich positiv ist, die andere wegen der vorausgesetzten Stabilität des Gleichgewichtes in $\xi_1=0, \ldots, \xi_n=0$.

Für derartige kleine Schwingungen lauten also die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} b_{11}\ddot{\xi}_1+\ldots+b_{1n}\ddot{\xi}_n+a_{11}\xi_1+\ldots a_{1n}\xi_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ b_{n1}\ddot{\xi}_1+\ldots+b_{nn}\ddot{\xi}_n+a_{n1}\xi_1+\ldots a_{nn}\xi_n&=0. \end{aligned}$$

Durch eine Transformation der Variablen ξ_h läßt sich für sie eine einfache »Normalform« finden.

Nach einem bekannten Satze der Algebra lassen sich für zwei positiv definite quadratische Formen von n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$

$$F=\sum_{h,k} a_{hk}x_hx_k \quad \ldots \quad (1),\qquad G=\sum_{h,k} b_{hk}x_hx_k \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

stets durch eine lineare Transformation der Gestalt

$$x_h=\sum_k t_{hk}y_k \quad (h=1,\ldots,n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit reellen Koeffizienten t_{hk} neue Veränderliche $y_1, \ldots, y_n$ so einführen, daß F und G in je eine Summe von Quadraten übergehen:

$$F=\sum_h \lambda_h y_h^2 \quad \ldots \quad (4),\qquad G=\sum_h y_h^2 \quad (h=1,\ldots,n) \ldots \quad (5).$$

Dabei sind die reellen und positiven Größen λ_h die Wurzeln der Determinantengleichung:

$$|a_{hk}-\lambda b_{hk}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & \ldots & a_{1n}-\lambda b_{1n}\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ a_{n1}-\lambda b_{n1} & \ldots & a_{nn}-\lambda b_{nn}\end{vmatrix}=0.$$

[1]) Alle Summationsbuchstaben in dieser Arbeit laufen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, von 1 bis n.

Führen wir also anstelle der ursprünglichen Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ durch die Gleichungen $\xi_h = \sum_k t_{hk}\,\eta_k$ $(h = 1, \ldots, n)$ die »Normalkoordinaten« $\eta_1, \ldots, \eta_n$ ein, so wird

$$U = \sum_h \lambda_h\,\eta_h^2\,, \qquad T = \sum_h \dot{\eta}_h^2\,,$$

und die Lagrangeschen Gleichungen nehmen die einfache Gestalt

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \lambda_1\,\eta_1 = 0, \ldots, \qquad \frac{d^2\eta_n}{dt^2} + \lambda_n\,\eta_n = 0$$

an. Ihre Lösung ist $\eta_h = y_h\,e^{i\nu_h t} = y_h\,e^{i\sqrt{\lambda_h}\,t}$ bei beliebiger Wahl der reellen oder imaginären zeitlichen Konstanten $y_1, \ldots, y_n$. Man sieht, daß die Wurzeln λ_h der Determinantengleichung mit den Quadraten der Eigenschwingungszahlen ν_h übereinstimmen. Untersuchungen über die λ_h liefern demnach Aussagen über die ν_h.

Wir wollen diese λ_h die »Eigenwerte von F in bezug auf G« nennen und nach wachsender Größe geordnet denken. Aus der Darstellung (4), (5) liest man dann unmittelbar ab, daß λ_1 der kleinste Wert ist, den die Form F unter der Nebenbedingung

$$G = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

annehmen kann, daß weiter λ_p das Minimum von F darstellt, wenn für die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ außer (6) noch die Nebenbedingungen $y_1 = 0, \ldots, y_{p-1} = 0$ oder die äquivalenten aus diesen durch die Gleichungen (3) hervorgehenden Bedingungen gestellt werden.

1. Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte. Wir betrachten das Problem: F zum Minimum zu machen, wenn außer der Bedingung (6) noch $p-1$ weitere Bedingungen

$$\sum_h \alpha_{hj}\,x_h = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p-1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

für die Größen $x_1, \ldots, x_n$ erfüllt sein müssen, wobei die α_{hj} gegebene Konstanten bedeuten. Ein solches Minimum muß es nach den elementaren Sätzen über stetige Funktionen stets geben. Wir wollen den Minimalwert von F mit $f(\alpha)$ bezeichnen, um seine Abhängigkeit von den Konstanten α_{hj} zum Ausdruck zu bringen. Führen wir nun an Stelle der x_h durch (3) die Veränderlichen y_h ein, so geht (6) in

$$\sum_h y_h^2 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

über, während die Gleichungen (7) wieder die analoge Form

$$\sum_h \beta_{hj}\,y_h = 0 \qquad (j = 1, \ldots, p-1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

erhalten, wobei auch die β_{hj} gegebene Konstanten sind. Wir können diesen Bedingungen durch ein Wertsystem der Variabeln y_h genügen, für welches $y_{p+1} = 0, \ldots, y_n = 0$ ist; denn es resultieren dann für die p Größen $y_1, \ldots, y_p$ aus (7) gerade $p-1$ homogene lineare Gleichungen, welche gewiß stets eine nicht triviale Lösung besitzen, und eine solche Lösung läßt sich immer durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor der Bedingung (8) anpassen. Für das so sich ergebende Wertsystem $y_1, \ldots, y_n$ wird $F = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_p y_p^2$, und da $\lambda_{h+1} \geqq \lambda_h$ gilt, so folgt mit Rücksicht auf (8) $F \leqq \lambda_p\,(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_h^2) = \lambda_p$; das Minimum $f(\alpha)$ ist also erst recht nicht größer als λ_p. Andererseits wird, wenn wir als Nebenbedingungen (9) gerade $y_1 = 0, \ldots, y_{p-1} = 0$ wählen, nach dem in der Einleitung Gesagten das Minimum gerade gleich λ_p; es ergibt sich also folgendes Resultat:

Satz 1. Der $p$te Eigenwert der quadratischen Form F in bezug auf die quadratische Form G ist der größte Wert, welchen das Minimum von F bei der Nebenbedingung (6) sowie irgendwelchen $p-1$ linearen homogenen Nebenbedingungen der Gestalt (7) annehmen kann, wenn die Gestalt dieser Nebenbedingungen variiert wird.

2. Anwendungen auf schwingende Systeme von n Freiheitsgraden. Die mechanische Bedeutung einer Gleichung von der Form (7) ist, daß dem vorgelegten System, welches wir von nun an mit dem Buchstaben S bezeichnen wollen, ein Freiheitsgrad geraubt wird. Wir könnten dies zum Ausdruck bringen, indem wir eine der Variabeln x_h durch die anderen berechnen und diesen Wert in die rechten Seiten von (1) und (2) einführen, so daß F und G dann als quadratische Formen von $n-1$ Variabeln erscheinen; doch wollen wir der Uebersicht halber diese Elimination nicht ausgeführt denken. Bezeichnen wir von den nach wachsender Größe geordneten

Eigenschwingungszahlen $\nu, \ldots, \nu_n$ die erste als den Grundton, die weiteren als den ersten, zweiten usw. Oberton des Systems, so liefert uns Satz 1 sofort folgende Tatsache:

Satz 2. Der $p$te Oberton eines schwingenden Systems ist der höchste unter den Grundtönen aller Systeme, welche aus dem gegebenen durch Auferlegung von irgendwie gewählten p Bindungen entstehen.

Wir wollen uns nun neben dem ursprünglichen System S ein zweites S' vorstellen, welches aus S durch Hinzufügung von r Zwangsbedingungen

$$\sum_k \gamma_{kl} x_k = 0 \quad (l = 1, \ldots, r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

entsteht, wobei die γ_{kl} fest gegebene Konstanten bedeuten. Die Schwingungszahlen von S' seien nach wachsender Größe geordnet $\nu_1', \ldots, \nu'_{n-r}$, die Eigenwerte des entsprechenden Eigenwertproblems (für dessen Ausführung man sich vermöge (10) r Variable aus F und G eliminiert denken müßte) seien $\lambda_1', \ldots, \lambda'_{n-r}$. Der Wert λ_p' entsteht offenbar durch genau das entsprechende Maximum-Minimum-Problem wie der Wert λ_p; nur sind im ersten Falle den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ jeweils außer den $p-1$ Bedingungen (7) noch die weiteren r Bedingungen (10) auferlegt. Es wird also wegen der Verengerung der Gesamtheit der zur Konkurrenz zugelassenen Wertsysteme $x_1, \ldots, x_n$ das einzelne Minimum $f'(\alpha)$ für S' nicht kleiner sein, als das entsprechende $f(\alpha)$ für S, und daher muß dasselbe auch für die Maxima dieser Minima gelten, d. h. es ist $\lambda_p' \geqq \lambda_p$ und somit $\nu_p' \geqq \nu_p$. Ferner ist der Wert λ_{p+r} gleich dem Maximum von $f(\alpha)$, wenn zu den Gleichungen (7) noch r weitere analoge Gleichungen $\sum_h \alpha_{hj} x_h = 0 \quad (j = p, \ldots, p+r-1)$ hinzutreten; dieses Maximum ist also sicher größer oder wenigstens nicht kleiner als das Maximum, das man bekommt, wenn man für die Größen α_{hj} $(j > p-1)$ die Werte γ_{kl} $(l = 1, \ldots, r)$ festhält; dieses letztere Maximum ist aber nach der Definition des Systems S' nichts anderes als der Wert λ_p'. Wir erhalten also das Resultat:

Satz 3. Geht ein System S durch Auferlegung von r Zwangsbedingungen der Form (10) in ein »$r$fach gebundenes« System S' über, so sind die Schwingungszahlen $\nu_1', \ldots, \nu'_{n-r}$ des gebundenen Systems nicht kleiner als die entsprechenden Schwingungszahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{n-r}$ des freien Systems, aber auch nicht größer als die Schwingungszahlen $\nu_{r+1}, \ldots, \nu_n$ des freien Systems, d. h. es gelten die Beziehungen

$$\lambda_p \leqq \lambda_p' \leqq \lambda_{p+r}, \qquad \nu_p \leqq \nu_p' \leqq \nu_{p+r} \quad (p = 1, \ldots, n-r).$$

Wir betrachten nun ein System S', welches aus S dadurch hervorgeht, daß einzelne der Massen in S vergrößert werden, keine aber verringert wird, oder, wie wir kurz sagen wollen, ein System, welches aus S durch Vermehrung der Trägheit entsteht. Dieser Uebergang drückt sich dadurch aus, daß für jede Konfiguration der Koordinaten und Geschwindigkeiten die kinetische Energie von S' nicht kleiner ist als die von S, während die potentiellen Energien gleich bleiben; mathematisch gesprochen tritt an die Stelle der quadratischen Form G eine andere Form $G' = G + G''$, wobei G'' wieder eine negativer Werte nicht fähige quadratische Form ist. Wenn daher für ein Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$ die Beziehung (6) gilt, so wird $G' \geqq 1$; man muß daher die Variablen mit einem gemeinsamen Faktor, der absolut genommen mindestens gleich 1 ist, dividieren, wenn man

$$G' = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,a)$$

machen will. Hierdurch verkleinert sich der Wert von F entsprechend, und man schließt nun unmittelbar dasselbe für die Minima von F unter den Nebenbedingungen (6), (7) bezw. den Nebenbedingungen (6 a), (7), also auch für die zugehörigen Maximinima: es wird somit $\lambda'_p \leqq \lambda_p$, und wir haben folgendes Resultat:

Satz 4. Bei Vergrößerung der Trägheit fällt der Grundton und jeder Oberton oder nimmt wenigstens nicht zu.

In entgegengesetzter Richtung wie die Vermehrung der Trägheit wirkt eine »Versteifung« des Systems; darunter wollen wir den Uebergang zu einem System S' verstehen, für welches bei ungeänderter kinetischer Energie die potentielle Energie einer gegebenen Konfiguration größer oder wenigstens nicht kleiner ist als die des Systems S; hier tritt also an die Stelle der quadratischen Form F eine andere Form $F' = F + F''$,

wobei F'' wieder eine negativer Werte nicht fähige quadratische Form bedeutet. Ganz genau wie der vorige Satz ergibt sich

Satz 5. Bei einer Versteifung des Systems steigt der Grundton und jeder Oberton oder nimmt wenigstens nicht ab.

Es bedarf kaum einer besonderen Erwähnung, daß sich das umgekehrte Verhalten zu den in Satz 3 bis 5 gekennzeichneten Tatsachen ergibt, wenn wir Zwangsbedingungen aufheben, Massen vermindern oder das System lockern, d. h. zu einem System S' übergehen, demgegenüber S als versteift erscheint.

Es liegt ferner nahe, eine Bindung, wie sie durch eine Relation (10) gegeben ist, als Grenzfall einer Versteifung anzusehen, was man mathematisch zum Ausdruck bringen kann, indem man zu F einen Term der Form $t(\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n)^2$ addiert und dann den Parameter t über alle Grenzen wachsen läßt; dabei werden, wie man aus den obigen Ausführungen leicht einsieht, der Grundton und die Obertöne monoton von den Werten für das ungebundene zu den entsprechenden Werten für das gebundene System ansteigen, während der höchste Oberton über alle Grenzen wächst.

3. Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Die unhomogene schwingende Saite. Bei Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden lassen sich dieselben Fragen behandeln, wenn man die Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Variablen heranzieht; anstatt diesen Weg einzuschlagen, empfiehlt es sich jedoch, von Integralausdrücken der kinetischen und potentiellen Energie auszugehen; es treten dann an die Stelle der oben behandelten gewöhnlichen Minimumprobleme entsprechende Extremumprobleme der Variationsrechnung. Wir wollen hier das Beispiel einer eingespannten schwingenden Saite behandeln, deren Elastizitätsmodul und Massendichte Funktionen des Ortes sind. Die Saite möge in der Ruhelage das Stück $0 \leq x \leq l$ der x-Achse decken; mit $w(x, t)$ bezeichnen wir die transversale Elongation der Punkte der Saite als Funktion von x und der Zeit t, mit $\dot{w}$ die Ableitung von w nach der Zeit, mit w' die nach x. Dann erhalten wir für die potentielle Energie einen Ausdruck der Form

$$U = \int_0^l e\, w'^2\, dx,$$

für die kinetische Energie einen Ausdruck

$$T = \int_0^l q\, \dot{w}^2\, dx,$$

wobei e, q durchweg positive Funktionen von x sind (und zwar ist dabei q die halbe Massendichte, e die halbe Spannung der Saite an der Stelle x). Die Bewegungsgleichung der Saite lautet $\frac{\partial}{\partial x}\left(e \frac{\partial w}{\partial x}\right) = q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$; an den Endpunkten muß für jeden Wert von t die Randbedingung $w = 0$ erfüllt sein. Wir gelangen zu den Eigenschwingungen, wenn wir für w den Ansatz $w = u\, e^{i\nu t}$ machen, wobei u eine nur von x abhängige, für $x = 0$ und $x = l$ verschwindende Funktion ist. Für diese ergibt sich dann sofort die Differentialgleichung

$$(e u')' + \lambda q\, u = 0 \quad \ldots \quad (12),$$

falls wir $\nu^2 = \lambda$ setzen; es handelt sich also bei der Untersuchung der Bewegung der schwingenden Saite um die Ermittlung derjenigen »Eigenwerte« $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ für den Parameter λ, für welche es Lösungen $u_1, u_2, \ldots$ von (12) gibt, die, ohne identisch zu verschwinden, am Rande Null sind. Die Eigenwerte λ_h sind die Quadrate der Eigenschwingungszahlen ν_h. Man erhält nach den elementaren Grundregeln der Variationsrechnung in bekannter Weise die nach wachsender Größe geordneten Eigenwerte λ_h und die zugehörigen »Eigenfunktionen« u_h $(h = 1, 2, \ldots)$ folgendermaßen: Wenn zum Vergleich alle im Intervalle $0 \leq x \leq l$ mit stückweise stetiger erster Ableitung versehenen stetigen Funktionen u zugelassen werden, welche am Rande $x = 0$, $x = l$ verschwinden, so wird λ_1 gleich dem Minimum des Integrals

$$F = \int_0^l e\, u'^2\, dx \quad \ldots \quad (13)$$

unter der Nebenbedingung

$$G = \int_0^l q u^2 \, dx = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

und zwar wird dieses Minimum erreicht für $u = u_1$. Der $p$te Eigenwert λ_p ist entsprechend gleich dem kleinsten Wert, welchen das Integral F annehmen kann, wenn außer der Nebenbedingung (14) noch die $p-1$ weiteren Nebenbedingungen

$$\int_0^l q u u_h \, dx = 0 \quad (h = 1, \ldots, p-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

für die zum Vergleiche zugelassenen Funktionen gestellt werden. Dieses Minimum wird angenommen für $u = u_p$.

Für die Eigenfunktionen besteht außer den Relationen

$$\int_0^l q u_h^2 \, dx = 1, \quad \int_0^l q u_h u_k \, dx = 0 \quad (h \neq k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

noch die aus (12) sich unmittelbar ergebenden Gleichungen

$$\int_0^l e u_h' u_k' \, dx = 0 \quad (h \neq k), \quad \int_0^l e u_h'^2 \, dx = \lambda_h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Aus der soeben formulierten wohlbekannten und elementar beweisbaren Minimumeigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen erhalten wir ähnlich wie in **1** folgende Maximum-Minimum-Eigenschaft: Es seien $s_1, \ldots, s_{p-1}$ stückweise stetige Funktionen von x für $0 \leq x \leq l$, es sei $f\{s\}$ das Minimum des Integrals F, wenn zum Vergleich solche am Rande verschwindende stetige und mit stückweise stetigen Ableitungen versehene Funktionen u zugelassen werden, für welche außer der Bedingung (14) noch die weiteren Bedingungen

$$\int_0^l q s_h u \, dx = 0 \quad (h = 1, \ldots, p-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

erfüllt sind. Dann erhalten wir für $f\{s\}$ einen möglichst großen Wert, und zwar den Wert λ_p, wenn $s_1 = u_1, \ldots, s_{p-1} = u_{p-1}$; $u = u_p$ gesetzt wird.

Zum Beweise beachten wir, daß die Bedingungen (18), (14) sich stets durch eine lineare Kombination $\bar{u} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_p u_p$ der ersten p Eigenfunktionen erfüllen lassen, da die Gleichungen (18) $p-1$ homogene lineare Relationen für die p Größen $c_1, \ldots, c_p$ darstellen, und man ja stets solchen Gleichungen durch ein nicht identisch verschwindendes Wertsystem genügen kann; durch Multiplikation mit einem geeigneten gemeinsamen Faktor wird dann auch noch die Bedingung (14) befriedigt. Setzen wir diesen Wert $\bar{u}$ an Stelle von u in F und G ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (16) und (17) unmittelbar

$$F = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \ldots + \lambda_p c_p^2,$$
$$G = 1 = c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_p^2,$$

wegen $\lambda_h \leq \lambda_{h+1}$ wird also $F \leq \lambda_p (c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_p^2) = \lambda_p$, daher ist das Minimum $f\{s\}$ erst recht nicht größer als λ_p; da es aber für $s_1 = u_1$, $s_2 = u_2$, $\ldots$, $s_{p-1} = u_{p-1}$ genau gleich λ_p wird, so ist die Behauptung erwiesen.

Nunmehr folgen für das Schwingungsproblem genau wie in **2** folgende Tatsachen: **Werden einer Saite irgendwelche Zwangsbedingungen auferlegt, so wird der Grundton und jeder Oberton nicht fallen.** Denn durch Verschärfung der Konkurrenzbedingungen des betreffenden Variationsproblems muß für jedes Funktionssystem $s_1, \ldots, s_{p-1}$ das Minimum $f\{s\}$ vergrößert oder wenigstens nicht verkleinert werden; dasselbe gilt also auch für das Maximum dieses Minimums. Dabei ist es ganz gleichgültig, welcher Art die auferlegten Bedingungen sind, ob sie z. B. durch

Bedingungsgleichungen für einzelne Punkte der Saite oder Gleichungen, in welche alle Punkte der Saite eingehen, oder auch Ungleichungen ausgedrückt sind.

Ferner ergibt sich wie in **2**: Bei Vermehrung der Trägheit, d. h. Vergrößerung oder jedenfalls Nichtverminderung der Funktion q an jeder Stelle, nimmt der Grundton und jeder Oberton nicht zu. Bei Versteifung der Saite, d. h. Vergrößerung oder jedenfalls Nichtverkleinerung der Funktion e, nimmt der Grundton und jeder Oberton nicht ab. Das Umgekehrte gilt natürlich, wenn Zwangsbedingungen aufgehoben, die Trägheit vermindert oder das System gelockert wird.

Wir wollen von diesen Sätzen eine Anwendung machen, indem wir den $n$ten Eigenwert λ_n für großes n asymptotisch berechnen.

Denken wir der Saite S Zwangsbedingungen auferlegt, indem wir sie an $r-1$ äquidistant über sie verteilten Punkten festhalten, d. h. dort $u=0$ fordern, so wird sicher der $n$te Eigenwert λ_n' des so entstehenden Systems S' nicht kleiner sein als der $n$te Eigenwert λ_n der ursprünglichen Saite. Nun besteht das System S' einfach aus r unabhängig voneinander schwingenden, an den Endpunkten eingespannten Saiten von der Länge $\frac{l}{r}$. Der $n$te Eigenwert λ'_n dieses Systems ist die $n$tkleinste Zahl unter den zusammengenommenen Eigenwerten der Teilsysteme $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Bezeichnen wir also mit $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Schranke λ gelegenen Eigenwerte der ursprünglichen Saite, mit $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \ldots, A_r(\lambda)$ die entsprechenden Anzahlen für die Teilsaiten, so folgt unmittelbar

$$A(\lambda) \geq A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \ldots + A_r(\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Zweitens denken wir uns das mechanische System der Saite gelockert, indem wir an den Endpunkten die Bedingung $u=0$ aufheben und der Funktion u überdies in den $r-1$ Teilpunkten beliebige sprunghafte Unstetigkeiten gestatten (die Integrale F sind dann einfach als die Summen der entsprechenden Integrale für die Teilintervalle zu verstehen). Der $n$te Eigenwert λ''_n des so gelockerten Systems S'' wird nach den obigen Ausführungen der Bedingung $\lambda''_n \leq \lambda_n$ genügen. Andererseits besteht das System S'' wieder aus r völlig unabhängig voneinander schwingenden Saiten von der Länge $\frac{l}{r}$, deren Endpunkte frei, d. h. ohne Widerstand auf den zugehörigen Vertikalen beweglich sind. Der erste Eigenwert einer solchen Saite ist Null, da den Bedingungen des Variationsproblems für $p=1$ durch $u=$ konst. genügt werden kann. Bezeichnen wir nun mit $B_1(\lambda), B_2(\lambda), \ldots, B_r(\lambda)$ die Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte unserer Teilsysteme, so folgt wie oben

$$A(\lambda) \leq B_1(\lambda) + B_2(\lambda) + \ldots + B_r(\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Nun können wir für die Anzahlen $A_h(\lambda)$, $B_h(\lambda)$ untere bezw. obere Schranken auf folgende Art bestimmen: Es seien e_M^h, q_M^h die Maxima, e_m^h, q_m^h die Minima der Funktionen e, q im $h$ten Teilintervall. Ersetzen wir in unserem System die Funktion e im $h$ten Teilintervalle durch die Konstante e_M^h, die Funktion q durch die Konstante q_m^h, und betrachten wir etwa zunächst das Schwingungsproblem der eingespannten Teilsaite S_h für das $h$te Teilintervall; die Ersetzung der Funktionen e, q durch die angegebenen Konstanten bedeutet Uebergang zu einem System S_h^*, welches zugleich gegenüber S_h in seiner Trägheit gemindert und versteift ist; zwischen der Anzahl $A_h(\lambda)$ der unterhalb λ gelegenen Eigenwerte von S_h und der entsprechenden Anzahl $A_h^*(\lambda)$ von S_h^* besteht also die Beziehung $A_h(\lambda) \geq A_h^*(\lambda)$. Nun läßt sich $A_h^*(\lambda)$ explizite angeben. Die Eigenwerte von S_h^* sind nämlich nichts anderes als die Eigenwerte der Differentialgleichung $u'' e_M^h + \lambda q_m^h u = 0$ für das Intervall $0 \leq x \leq \frac{l}{r}$ bei der Randbedingung $u=0$. Die Eigenfunktionen und Eigenwerte dieses Problems werden aber durch die Ausdrücke $\sin\left(k \frac{x}{l} r\pi\right)$, $\frac{k^2 r^2}{l^2} \pi^2 \frac{e_M^h}{q_m^h}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und somit $A_h^*(\lambda)$ durch den Ausdruck $\frac{l}{r\pi} \sqrt{\frac{q_m^h}{e_M^h}} \sqrt{\lambda}$ ge-

geben, wie man sofort erkennt, wenn man $k = A(\lambda)$ einsetzt. Somit ergibt sich aus (19)

$$A(\lambda) \geq \sqrt{\lambda}\,\frac{l}{\pi}\,\frac{1}{r}\sum_{h=1}^{r}\sqrt{\frac{q_m^h}{e_M^h}} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Genau so erhält man eine untere Schranke, indem man beachtet, daß die Eigenwerte der Differentialgleichung $u''\,e_m^h + \lambda\,q_M^h\,u = 0$ für das $h$te Teilintervall bei der Randbedingung $u' = 0$, welche freien Rändern, d. h. dem Fehlen von Randbedingungen im Variationsproblem, entspricht, mit den Zahlen $\frac{k^2 r^2}{l^2}\pi^2\frac{e_m^h}{q_M^h}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ identisch sind, indem hier die Eigenfunktionen durch die Ausdrücke $\cos\left(k\frac{x}{l}\,r\pi\right)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ geliefert werden.

Es wird demgemäß die Anzahl $B_h^*(\lambda)$ der unterhalb λ gelegenen Eigenwerte dieses Problems durch $1 + \frac{l}{r\pi}\sqrt{\frac{q_M^h}{e_m^h}}\sqrt{\lambda}$ gegeben. Da die Ersetzung von q durch q_M^h, von e durch e_m^h eine Vermehrung der Trägheit bei gleichzeitiger Lockerung des Systems bedeutet, so folgt sofort $B_h(\lambda) \leq B_h^*(\lambda)$ und somit wegen (20)

$$A(\lambda) \leq r + \sqrt{\lambda}\,\frac{l}{\pi}\,\frac{1}{r}\sum_{h=1}^{r}\sqrt{\frac{q_M^h}{e_m^h}} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Die Gleichungen (21), (22) gelten für jeden beliebigen, festgewählten Wert von r; indem wir r hinreichend groß nehmen, können wir erreichen, daß die Ausdrücke $\frac{1}{r}\sum_{h=1}^{r}\sqrt{\frac{q_m^h}{e_M^h}}$, $\frac{1}{r}\sum_{h=1}^{r}\sqrt{\frac{q_M^h}{e_m^h}}$ sich beide beliebig wenig von dem Integral $\int_0^l\sqrt{\frac{q}{e}}\,dx$ unterscheiden, und so ergibt sich aus den Gleichungen (21), (22) unmittelbar die Beziehung

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{l}{\pi}\int_0^l\sqrt{\frac{q}{e}}\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (23),$$

welche man auch in der Form schreiben kann

$$\sqrt{\lambda_n} \sim \frac{n\pi}{l}\,\frac{1}{\int_0^l\sqrt{\frac{q}{e}}\,dx} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

oder, indem man die $n$te Eigenschwingungszahl $\nu_n = \sqrt{\lambda_n}$ einführt,

$$\nu_n \sim \frac{n\pi}{l}\,\frac{1}{\int_0^l\sqrt{\frac{q}{e}}\,dx} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Dies ist die gesuchte asymptotische Darstellung von λ_n bezw. ν_n für große Werte von n.

Zum Schluß sei bemerkt, daß die Ueberlegungen dieser Nummer nur ein Beispiel für eine Methode zur Untersuchung eines ausgedehnteren Feldes von Problemen darstellen; für diese weitergehenden, sich insbesondere auf das Eigenwertproblem für partielle Differentialgleichungen beziehenden Untersuchungen muß auf die in Anmerkung [1] zitierte Abhandlung verwiesen werden.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zum Strahlungsgesetz.

Von **E. J. GUMBEL** in Berlin.

Das Plancksche Strahlungsgesetz ist wegen seines engen Zusammenhanges mit der Quantentheorie eine der wesentlichsten Grundlagen der modernen Physik. Durch die Messungen war es nach der bisherigen Auffassung bis auf kleine Fehler gut bestätigt. Nernst und Wulf[1]) kamen aber bei einer Durchsicht sämtlicher bis 1919 vorliegender Messungen zu dem Schluß, die Abweichungen seien doch so bedeutend, daß man die Formel modifizieren müsse, und schlugen ein empirisches multiplikatives Zusatzglied $1 + \alpha$ vor. Da die beiden Grenzübergänge der Planckschen Formel für große und kleine Werte der unabhängigen Veränderlichen x und das Wiensche Verschiebungsgesetz auf Grund allgemeiner Erfahrungen als gesichert gelten müssen, kann α nur eine Funktion von x sein, die für große und kleine Werte von x den Wert null annimmt. Dabei ist $x = ch/k\lambda T$, wo c die Lichtgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge, k die Boltzmannsche Konstante, h das Elementarquantum und T die absolute Temperatur bedeuten. Das Strahlungsgesetz lautet demnach nach Nernst und Wulf:

$$E_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^x - 1} (1 + \alpha),$$

wobei E_λ die spezifische Helligkeit eines schwarzen Körpers für die Wellenlänge λ bezeichnet. Für α, das nach der Planckschen Theorie stets den Wert null haben müßte, geben die Autoren als Kompromiß zwischen den Abweichungen der verschiedenen, als zuverlässig betrachteten Messungen von der Planckschen Formel eine empirische Zahlentafel, die einen Höchstwert von $\alpha = 0{,}07$ für $x = 2{,}5$ aufweist. Die vorgeschlagene Aenderung ist, wenn berechtigt, von außerordentlich weitgehenden Folgen. Denn durch sie würde das Plancksche Strahlungsgesetz zu einer theoretisch nicht begründeten Approximationsformel. Da es aber aus den statistischen Ueberlegungen der Quantentheorie erwachsen ist, müßte an diesen selbst etwas falsch sein. Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit dieser Frage hat nun Rubens[2]) eine systematische Reihe von Messungen der Energieverteilung im Normalspektrum vorgenommen. Rubens nahm die Wellenlängen λ von 4 bis 16 μ und veränderte die Temperatur T, sodaß der ganze Bereich der x, in dem die Nernstsche Korrektur gelten sollte, überdeckt war.

Im folgenden wird versucht, durch fehlertheoretische Ueberlegungen, und zwar von den Gesichtspunkten der Gaußschen Theorie, der Kollektivmaßlehre und der Korrelationstheorie, aus den Rubensschen Messungen eine begründete Entscheidung zwischen dem Nernstschen und Planckschen Standpunkt zu gewinnen. Das Ergebnis fällt bei allen drei Betrachtungen, in Uebereinstimmung mit den Folgerungen, die Rubens in einer vom Standpunkt der Statistik m. E. nicht zwingenden Weise gezogen hat, zugunsten des Planckschen Gesetzes aus. Zum Schluß wird gezeigt, daß auch ein origineller Ansatz von Charlier durch die Rubensschen Messungen widerlegt ist.

1. Betrachtungen vom Standpunkt des Gaußschen Fehlergesetzes. Hat man zu den verschiedenen x die zugehörige spezifische Helligkeit E_λ beobachtet, so kann man den Planckschen bezw. Nernstschen Ausdruck auf die Form bringen

$$E_\lambda (e^x - 1) = C, \qquad \frac{E_\lambda (e^x - 1)}{1 + \alpha} = C'$$

wobei C bezw. C' konstant sein muß für eine bestimmte Wellenlänge und alle Temperaturen, also nur eine Funktion der Wellenlänge sein darf. Die Entscheidung über die Plancksche bezw. Nernstsche Formel ist damit auf die Untersuchung der Konstanz der Größen C bezw. C' zurückgeführt.

Man könnte zunächst die gemessenen C bezw. C' für eine bestimmte Wellenlänge als Funktionen der x auftragen und nachsehen, welche der beiden Reihen konstantere

[1]) W. Nernst und Th. Wulf, Ueber eine Modifikation der Planckschen Strahlungsformel auf experimenteller Grundlage, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 21, 1919, S. 29.

[2]) H. Rubens und G. Michel, Beitrag zur Prüfung der Planckschen Strahlungsformel. Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften v. 21. Juli 1921.

Werte ergibt, bezw. systematische Abweichungen, entsprechend dem Gang der Werte von $1 + \alpha$ aufweist. Doch liefert dies kein genügend deutliches Bild; bei einigen Messungen sieht man zwar einen systematischen Gang der C-Werte, bei andern schwanken aber beide Größen scheinbar unregelmäßig, so daß dieses Kriterium versagt.

Entscheidend läßt sich die Frage lösen, indem man untersucht, ob die gemessenen Abweichungen von der Konstanz dem Gaußschen Fehlergesetz genügen oder nicht. Da die Größen C und C' aber von den λ abhängen, wird diese Untersuchung nicht an den Fehlern selbst, sondern an ihren relativen Werten durchgeführt werden müssen. Man berechnet also für die verschiedenen C und C' die beiden zugehörigen Mittelwerte und dividiert die Abweichungen davon durch sie. Die beiden Häufigkeitskurven der relativen Fehler, von nun an mit δC und $\delta C'$ bezeichnet, sind in den Abb. 1 und 2 (untere Linien) aufgetragen. Als Größe der Intervalle wurde 2 Promille genommen und die Häufigkeit eines Intervalles jeweils dem zentralen Wert zugeordnet. Werte, die gerade an die Grenze zweier Intervalle fielen, wurden jeweils zur Hälfte auf beide verteilt.

Sollen die so ermittelten Fehler nur zufällige sein, d. h. den Messungen einer konstanten »wahren« Größe entstammen, so muß nach der Fehlertheorie die Häufigkeit eines Fehlers für den $|\delta C| \leqq a$ bezw. $|\delta C'| \leqq a$ durch

$$\frac{2N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{\vartheta\sqrt{\pi}}} e^{-t^2} dt$$

gegeben sein, wobei $N = 130$ die Gesamtzahl aller Messungen und ϑ bezw. ϑ' den durchschnittlichen Fehler bedeutet. Die beiden durchschnittlichen Fehler waren $\vartheta = 43{,}4$ und $\vartheta' = 107{,}7$ für die Plancksche bezw. Nernstsche Kurve.

Wählt man die Integrationsgrenzen gleich den jeweils summierten Intervallgrenzen, so ergeben sich durch Subtraktion der in Zahlentafeln [1]) angegebenen Werte der Integrale die erwartungsgemäßen theoretischen Häufigkeiten der betreffenden relativen Fehler. Die beiden theoretischen Kurven sind in den Abb. 1 und 2 mit aufgetragen. Man sieht deutlich, daß sich die Kurve der Abweichungen von C der zugehörigen erwartungsgemäßen Kurve besser anschmiegt, als die Kurve der Abweichungen von C'. Die Verteilung der Fehler spricht also mehr für die Plancksche als für die Nernstsche Formel.

Bei diesem Vergleich besteht aber wegen der Art der Intervalleinteilung noch eine gewisse Willkür. Man könnte einwenden, daß die Nernstsche Kurve wegen der größeren Intervallanzahl (da in beiden Kurven die Intervallbreiten konstant gehalten sind) eine schlechtere Anpassung an die Theorie ergeben muß. In der Tat ergibt sich, wenn man die Nernstschen Fehler, wie dies in Abb. 3 geschehen ist, durch Wahl der Intervalle, zu je 6 vT. auf nur 17 Intervalle verteilt, eine weit bessere Anpassung an die zugehörige erwartungsgemäße Kurve als bei der früheren Art der Einteilung. Immerhin bleibt aber auch die Güte dieser Anpassung hinter der Anpassung der Planckschen Kurve zurück. Um diesen willkürlichen Faktor überhaupt auszuschalten, empfiehlt sich ein von der Art der Intervalleinteilung unabhängiger Vergleich von Erfahrung und Theorie. Die Zahlentafeln des Fehlerintegrals geben die Häufigkeit der Fehler, die unterhalb einer bestimmten absoluten Größe des Fehlers liegen. Summiert man also in den betreffenden Grenzen die beobachteten Fehler, so hat man bei diesem Vergleich von Theorie und Erfahrung die Willkür der Intervalleinteilung beseitigt, da die Resultate der Summation unabhängig von der Intervalleinteilung sind. Aber man würde die Unsymmetrien der beobachteten Fehler verwischen, wenn man bei diesem Verfahren nicht auch die Vorzeichen der Fehler berücksichtigte. Man berechnet also zunächst aus den Messungen, wieviele Ergebnisse jeweils unterhalb eines bestimmten δC- bezw. $\delta C'$-Wertes liegen. Man trägt dann als Abszissen sämtliche Beobachtungen nach ihrer Größe auf, und als Ordinate jeweils die Zahl der bis zu dem betreffenden δC- bezw. $\delta C'$-Wert eingetretenen Ergebnisse. So bekommt man eine Treppenlinie, die innerhalb der Variationsbreite von Null bis zur Gesamtzahl aller Messungen ansteigt.

Andererseits entnimmt man den Zahlentafeln der Gaußschen Funktion die Werte von Φ, die man halbiert und von der Mitte (dem arithmetischen Mittel der Fehler als Abszisse und $N/2 = 65$ als Ordinate) aus nach rechts aufwärts sowie nach links abwärts aufträgt. So bekommt man durch graphische Interpolation die zu der oben konstruierten

[1]) z. B. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung Bd. I, Leipzig 1914, S. 385.

empirischen Summenkurve gehörige theoretische Summenkurve. Das Ergebnis der für beide Theorien durchgeführten Rechnung ist in den Abb. 1 und 2 (obere Kurven) dargestellt. Man sieht auch hier, daß die summierten Abweichungen von der Planckschen Formel sich der zugehörigen erwartungsgemäßen Summenverteilung besser anschmiegen, als die Abweichungen von der Nernstschen Formel der zu ihr gehörigen theoretischen Summenverteilung.

2. Präzisionsmaß und Variationsbreite. Es könnte nun eingewendet werden, man könne schon aus der Variationsbreite der Beobachtungen entnehmen, daß die Nernstsche Formel die unrichtigere sei. Sie ergebe nämlich einen viel größeren Variationsbereich, so daß man ihr von vornherein einen viel geringeren Wert zuschreiben müsse.

Diese Beurteilung ist nur insoweit berechtigt, als sie sich auf das bessere Präzisionsmaß der nach Planck gedeuteten Messungen stützt. Denn dies ist für Planck $h = 0{,}013$ und für Nernst $h' = 0{,}005$. Andererseits läßt sich zeigen, daß die Variationsbreiten in beiden Fällen mit den Präzisionsmaßen in der von der Theorie geforderten Uebereinstimmung stehen. Für die nach Nernst gedeuteten Messungen ist diese Uebereinstimmung sogar besser. Wenn man nämlich den erwartungsgemäßen Variationsbereich für die beiden als Gaußsche Kurven betrachteten Verteilungen berechnet und dabei die von L. v. Bortkiewicz[1]) angegebene Formel für die erwartungsgemäße Variationsbreite v als Funktion des durchschnittlichen Fehlers ϑ und der Zahl der Messungen N verwendet, so ergibt sich für $N = 130$, $v = 6{,}54\,\vartheta$, also

	Variationsbreite erwartungsgemäß	beobachtet	prozentuelle Abweichung
für die Plancksche Kurve . .	284	327	15,1
für die Nernstsche Kurve . .	706	771	9,2

Die Nernstsche Kurve liegt etwas besser innerhalb des ihr zugehörigen Variationsbereiches als die Plancksche. Aus den beiden Größen der Variationsbreite läßt sich jedenfalls kein neues Argument gegenüber dem gewinnen, was bereits aus der Betrachtung des Präzisionsmaßes hervorgeht.

3. Betrachtung vom Standpunkt der Kollektivmaßlehre. Um ein exakteres Bild von der Annäherung der beiden Fehlerkurven an die Gaußsche Kurve zu bekommen, bediene ich mich des von Bruns ausgebildeten Verfahrens der Kollektivmaßlehre. Das Verfahren besteht darin, daß man die beobachtete Verteilung durch eine Reihe von Funktionen, nämlich die Gaußsche Funktion und ihre Derivierten, wiedergibt, ähnlich wie man eine willkürliche Funktion in einem endlichen Intervall durch eine Fourier-Reihe wiederzugeben pflegt. Zunächst stellt man nach der von v. Mises gegebenen Deutung[2]) die wiederzugebende Verteilungskurve durch die Gaußsche Funktion dar, dann den Ueberschuß der wirklichen Messungsergebnisse über die erwartungsgemäße Anzahl von unterhalb eines bestimmten Wertes liegenden Resultaten wieder durch die Gaußsche Funktion usw. So bekommt man für die beobachtete Verteilung $\mathfrak{v}(x)$ die Entwicklung

$$\mathfrak{v}(x) = \sum_{1}^{n} c_\nu \, q_\nu(x),$$

wobei die q_ν jeweils die $(\nu-1)$ ten Differentialquotienten von

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

bedeuten. Durch geeignete Wahl des Koordinatenanfangspunktes und des Maßstabes gelingt es, c_2 und c_3 gleich null zu machen. Die c_ν berechnen sich nach denselben Methoden wie bei der Fourier-Reihe. Denn die q_ν genügen (v. Mises[3])) der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} q_\nu(x)\, q_\mu(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu, \\ \dfrac{2^{\nu-1}(\nu-1)!}{\sqrt{\pi}} & \text{für } \nu = \mu. \end{cases}$$

---

[1]) L. v. Bortkiewicz, Variationsbreite und mittlerer Fehler, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, 21, 1912, S. 3 bis 11.

[2]) R. v. Mises, Ueber die Grundbegriffe der Kollektivmaßlehre, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 21, 1912, S. 9 bis 20.

[3]) a. a. O. Gl. (7) und (8).

Maßstab der Verteilungskurve

der für
n) dar-
schen
er an-
hörigen

verden,
aß die
rößeren
ert zu-

zisions-
= 0,013
breiten
Ueber-
berein-
bereich
dabei
ations-
gen N

elchung

ations-
t sich
chtung

kteres
mmen,
Das
von
nulich
rier-
benen
dar,
mäße
h die
) die

tabes
elben
rtho-

rliner

schen

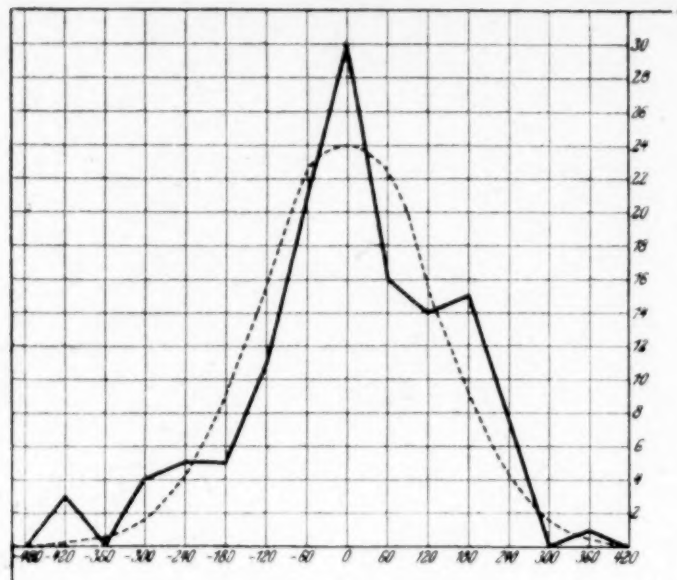


Abb. 3. Reduzierte Fehlerverteilung nach Nernst.

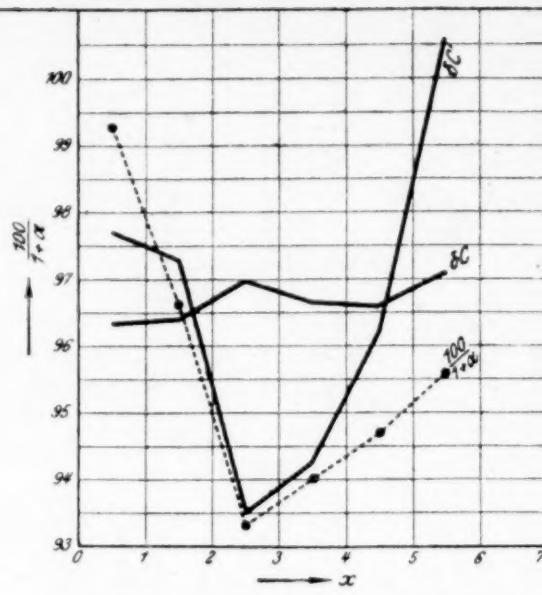


Abb. 4. Verlauf der Fehler und de α-Korrektur in Abhängigkeit von

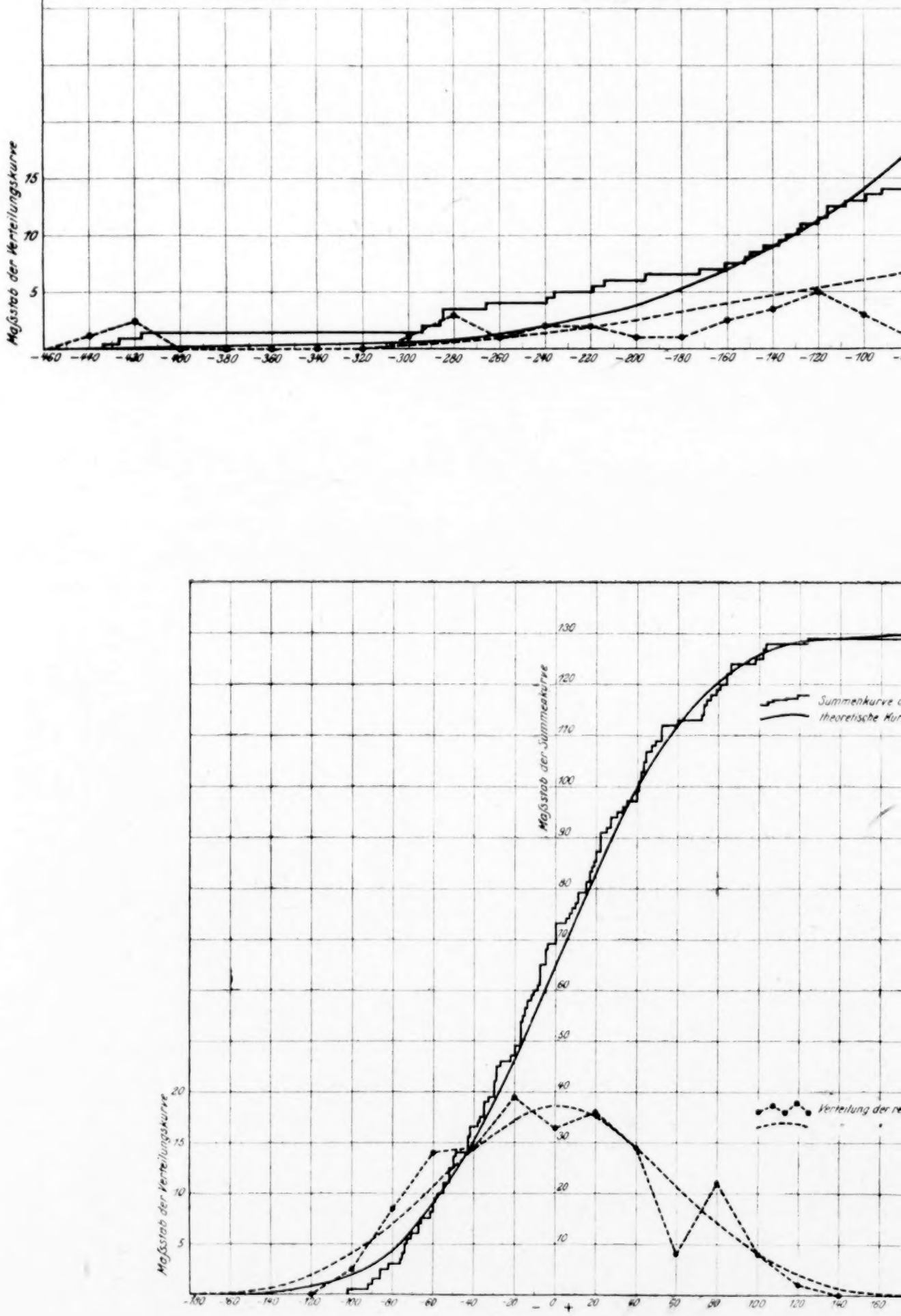
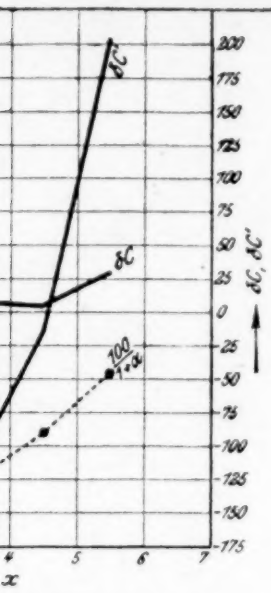


Abb. 1



Fehler und der
ängigkeit von x.

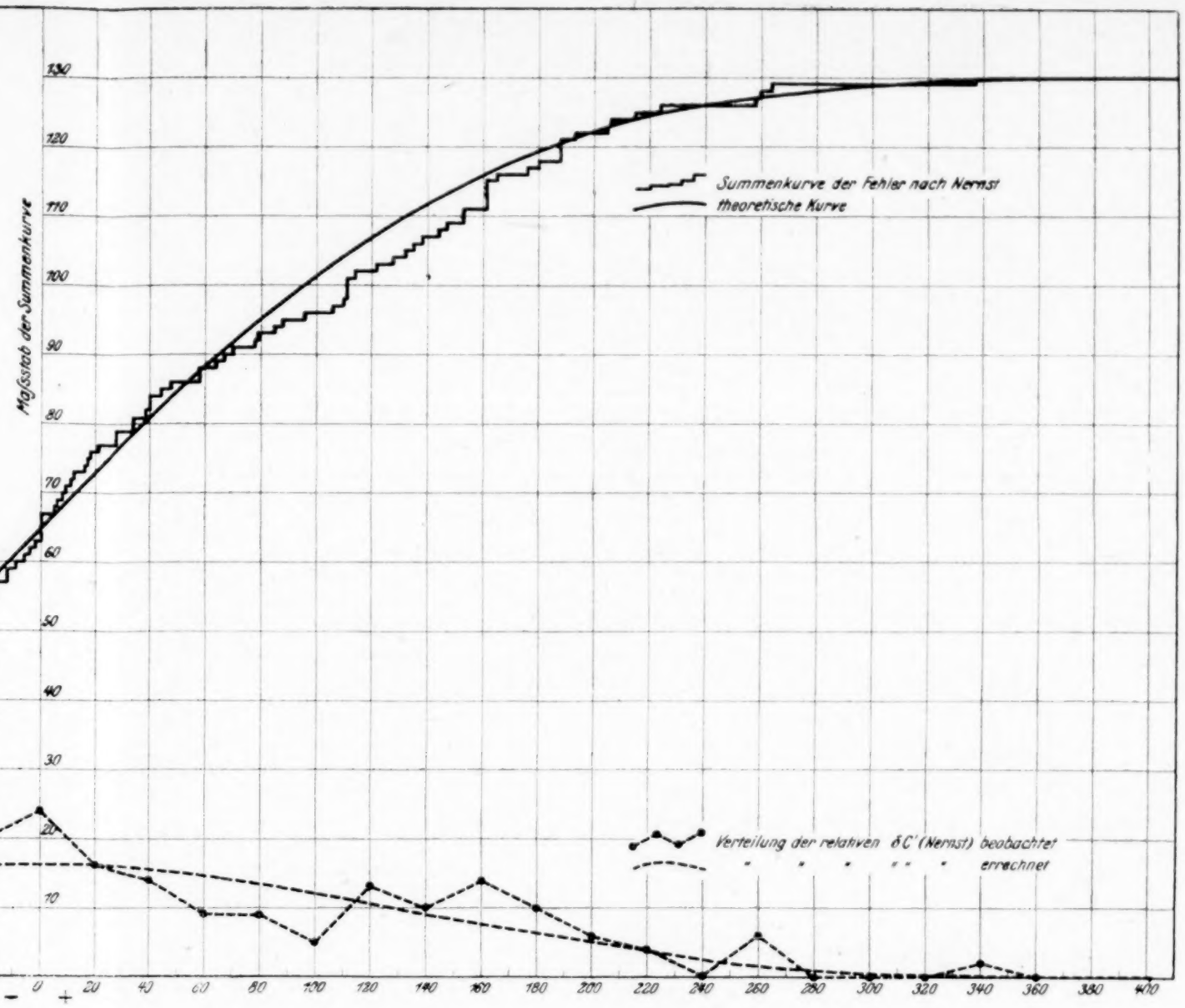
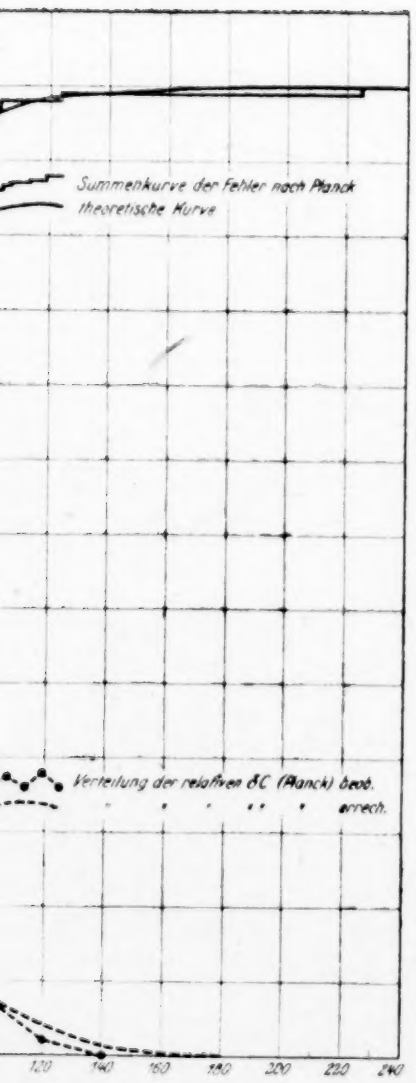


Abb. 2



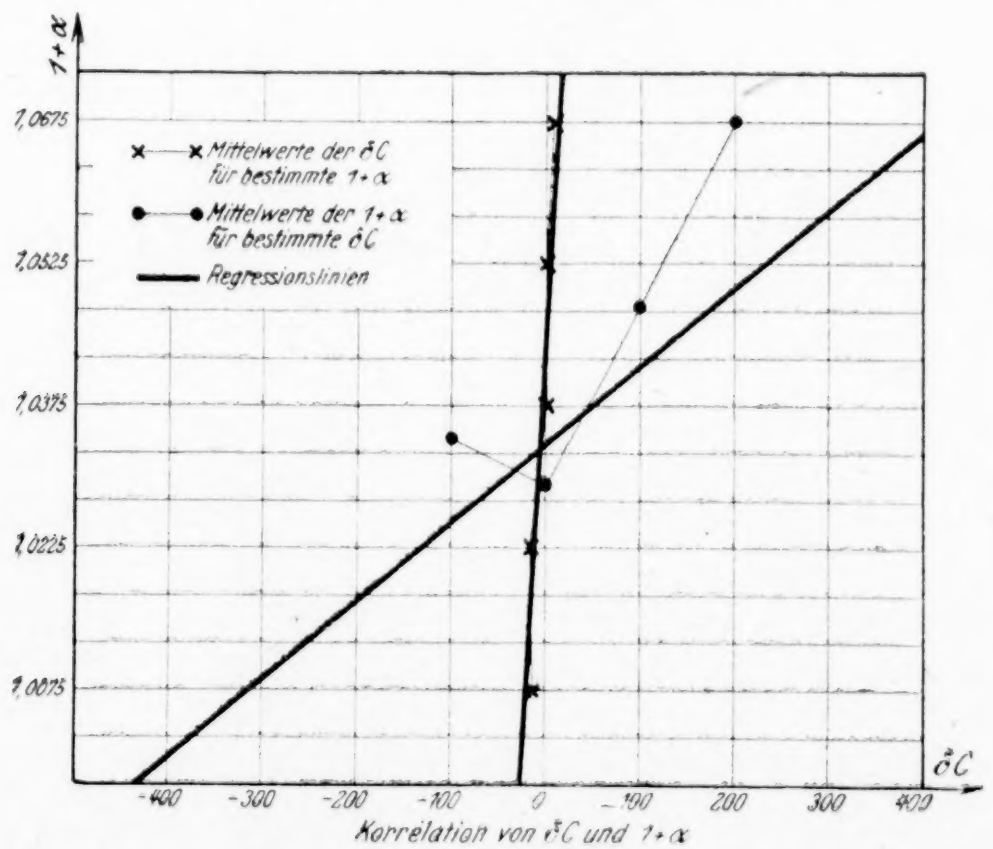
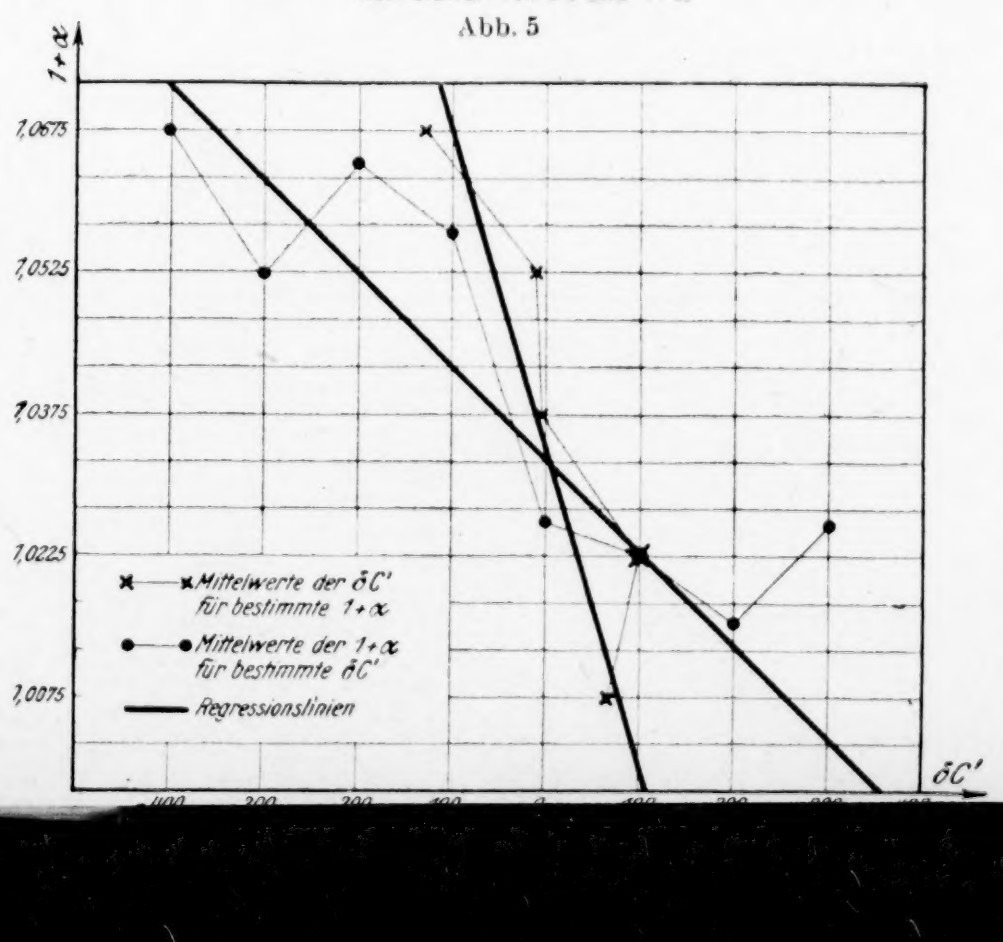


Abb. 5



Demnach erhält man durch gliedweise Integration der Reihe

$$c_\nu = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}(\nu-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\, \varphi_\nu(x)\, e^{x^2}\, dx\,.$$

Da $\varphi_\nu(x)\, e^{x^2}$ ein Polynom in x ist, so hat man damit die Berechnung der Koeffizienten auf die Berechnung der Momente von $v(x)$ zurückgeführt. Setzt man $v = h(x-A)$, wo A den Mittelwert und h das Präzisionsmaß der Fehlertheorie bedeutet, so bekommt man für die Verteilung die Entwicklung:

$$v(x) = h\,\varphi_1(v) + \frac{D_3}{2^2}\, h\,\varphi_4(v) + \frac{D_4}{2^3}\, h\,\varphi_5(v) + \ldots.$$

oder für die Summenfunktion durch Integration:

$$2\,\mathfrak{S}(x) = 1 + \Phi(v) + \frac{D_3}{2^2}\Phi_3(v) + \frac{D_4}{2^3}\Phi_4(v) + \ldots.$$

Dabei ist $\Phi(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-x^2} dx$ und die Indizes 3, 4 ..... bedeuten die Ableitung dritter, vierter ..... Ordnung nach v.

Bezeichnet man das ν-te Moment, berechnet vom arithmetischen Mittel A als Ausgangspunkt, mit μ_ν'

$$\mu_\nu' = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-A)^\nu\, v(x)\, dx\,,$$

so ist

$$D_3 = -\frac{{\mu_3}^3}{3\sqrt{2}\,{\mu_2}^3}, \qquad D_4 = {}^1/_{12}\left(\frac{{\mu_4}^4}{{\mu_2}^4} - 3\right), \ldots.$$

Hat man die Momente einer Verteilung berechnet, so hat man in den Konstanten D_3, D_4 ... einfache Kriterien der Anpassung an die Gaußsche Verteilung. Da die ungeraden Momente nur für unsymmetrische Kurven von Null verschieden sind, so ist D_3 ein Maß der Schiefe; denn die Division durch ${\mu_2}^3$ führt nur dazu, einen dimensionslosen Faktor zu erzeugen. Für $D_3 \lesseqgtr 0$ ist linksseitige bezw. rechtsseitige Asymmetrie vorhanden. Da D_4 (wie alle D überhaupt) für die Gaußsche Kurve gleich null wird, so bietet die Abweichung des $\frac{{\mu_4}^4}{{\mu_2}^4}$ vom Wert 3 ein weiteres Maß der Abweichung.

Wie Pearson[1]) gezeigt hat, ist $\frac{{\mu_4}^4}{{\mu_2}^4}$ ein Kriterium für die Verbreiterung der Kurve in der näheren Umgebung des Maximums. Ist dieser Ausdruck größer oder kleiner als 3, so ist das Maximum breiter oder spitzer als bei der Gaußschen Kurve. Wie die untenstehende Tabelle zeigt, ist das Maß der Schiefe D_3 bei der Nernstschen Kurve wesentlich größer, dagegen das Maß der Spitzigkeit D_4 umgekehrt kleiner als bei der Planckschen Kurve. Man hat daher das Bedürfnis nach einem zusammenfassenden Kriterium, das die beiden einander widersprechenden Kriterien verbindet.

Um zu einem solchen eindeutigen Kriterium für die Güte der Anpassung einer gegebenen Verteilung an die Gaußsche zu gelangen, kann man nach einem Vorschlag von v. Mises das Integralquadrat der Abweichung zwischen der empirischen, durch die Reihe dargestellten, und der theoretischen, Gaußschen Verteilung in der Weise berechnen, daß man die einzelnen Abweichungswerte noch jeweils mit $e^{\frac{v^2}{2}}$ multipliziert in Rechnung stellt. Damit erhält man das Kriterium der Anpassung

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} [v(x) - h\,\varphi_1(v)]^2\, e^{v^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{D_3}{2^2}\varphi_4(v) + \frac{D_4}{2^3}\varphi_5(v) + \ldots\right]^2 e^{v^2}\, dv.$$

Zufolge der oben dargelegten Orthogonalitätsbeziehungen berechnet sich die rechte Seite zu

$$F = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{{D_3}^2}{2^4}\, 2^3 \cdot 3! + \frac{{D_4}^2}{2^6}\, 2^4 \cdot 4! + \ldots\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(3\,{D_3}^2 + 6\,{D_4}^2 + \ldots).$$

[1]) K. Pearson, London Philosophical transactions, Bd. 198 A, 1902, S. 235 bis 229.

Kennt man alle Koeffizienten der Brunsschen Reihe einer Beobachtungsfolge, so hat man in F ein exaktes Maß für die Güte der Anpassung an die Gaußsche Normalverteilung. Im folgenden sind die Werte angegeben, die sich bei Beschränkung auf die ersten beiden Koeffizienten D mit der Genauigkeit des Rechenschiebers ergeben haben.

Bezeichnung	Symbol	Wert für die Plancksche Kurve	Wert für die Nernstsche Kurve
Arithmetisches Mittel	A	1,846	0,462
Durchschnittlicher Fehler	ϑ	43,4	114
Präzisionsmaß	h	0,0127	0,00495
1. Koeffizient der Brunsschen Reihe (Maß der Schiefe)	D_3	−0,118	0,141
2. Koeffizient der Reihe (Maß der Verbreiterung)	D_4	0,062	0,054
Maß der Abweichung von der Gaußschen Verteilung	F	0,0648	0,0761

Es zeigt sich also wieder, daß die Nernstsche Kurve ein größeres Maß von Unregelmäßigkeit aufweist als die Plancksche Kurve.

4. Betrachtung vom Standpunkt der Korrelationstheorie. Wir haben bisher stets die Frage untersucht, inwieweit die Größen C bezw. C' konstant sind, also inwieweit die Abweichungen von ihnen als zufällig betrachtet werden können. Der Ausgangspunkt unserer Fragestellung war aber, ob die α-Korrektion des Planckschen Gesetzes zur Darstellung der Messungen selbst nötig ist. Oder ob durch sie ein systematischer Gang in die jeweils konstant sein sollenden Werte der Helligkeit hineingebracht ist. Hierüber können die beiden bisherigen Methoden nichts aussagen. Diese Frage läßt sich mit Hilfe der Korrelationsmethode beantworten. Zunächst stellt man eine Tabelle auf, welche für jedes x den zugehörigen Wert der vorgeschlagenen Korrektur $1+\alpha$ und die δC und $\delta C'$ enthält. Verfolgt man den Gang der δC und $\delta C'$ für wachsende x, so sieht man, daß die δC regellos schwanken, daß dagegen die $\delta C'$ zuerst abnehmen bis $x = 2{,}5$ und von da an wieder zunehmen. Das ist aber genau der Gang, den die reziproken Werte von $1+\alpha$ besitzen. Diese Tabelle wurde durch entsprechende Mittelwertbildung auf 6 Zeilen konzentriert und ist in Abb. 4 wiedergegeben, wobei zu jeder Intervallmitte das zugehörige δC und $\delta C'$ und $\frac{100}{1+\alpha}$ aufgetragen ist.

Die graphische Darstellung ergibt einen ausgesprochenen Parallelismus zwischen dem Verlauf der $\delta C'$ und $\frac{100}{1+\alpha}$, während die δC vom Verlaufe der α-Korrektur ziemlich unabhängig sind. Nach der Nernstschen Hypothese müßte der Verlauf gerade umgekehrt sein. Der Schluß ist also berechtigt, daß die α-Korrektur in die Messungen ein ihnen fremdes Element hineinträgt. Unsere Darstellung hat nur den Nachteil, daß die verschiedenen Mittelwerte ganz verschiedene Gewichte haben, da in den verschiedenen x-Intervallen eben eine verschiedene Anzahl von Messungen vorgenommen wurde.

Eine andere Betrachtungsweise geht von den numerischen Werten der Korrektur $1+\alpha$ aus und liefert ein einfaches numerisches Maß für den Zusammenhang dieser Größen mit den jeweils zugehörigen Größen von δC und $\delta C'$. Man teile sowohl die Werte von $1+\alpha$ wie die von δC bezw. $\delta C'$ in eine Anzahl von Intervallen ein. Da die α nur ziemlich unsicher bestimmt sind, habe ich nur je 5 Intervalle genommen. Zu den Werten von $1+\alpha$ innerhalb eines gewissen Intervalls ergeben die Messungen eine bestimmte Anzahl von δC- bezw. $\delta C'$-Werten, die in ihr erstes Intervall, eine andere Zahl, die in ihr zweites Intervall fallen usw. Auf diese Weise bekommt man 2 Tafeln mit doppeltem Eingang, welche die Frage beantworten, ob zu großen Werten von $1+\alpha$ hauptsächlich große oder kleine Werte von δC bezw. $\delta C'$ gehören, oder ob diese Werte zufällig schwanken, gleichgültig welchen Wert $1+\alpha$ besitzt. Den einfachsten Ueberblick gewährt es, wenn man für jedes Intervall der δC bezw. $\delta C'$ die zugehörigen Mittelwerte der $1+\alpha$ und umgekehrt für jedes Intervall der $1+\alpha$ die zugehörigen Mittelwerte der δC bezw. $\delta C'$ berechnet. Die Resultate der Rechnung, die sogen. »Regressionslinien«, sind in den Abb. 5 und 6 wiedergegeben, wobei die Intervalle jeweils durch die Intervallmitten dargestellt wurden.

Man sieht, daß wenn $1+\alpha$ fällt, $\delta C'$ wächst, d. h. infolge der α Korrektur werden die Messungen nicht mit einer konstanten, sondern mit einer von $1+\alpha$ abhängigen

Größe verglichen; also ergibt die Strahlungsformel ohne die Korrektur eine konstante Größe C. Dies sieht man deutlich bei Betrachtung der Abb. 5. Sie läßt sich viel eher als die erste dahin deuten, daß für jeden Wert der einen Variabeln die andere zufällig schwankt. Vollkommen wäre dies der Fall, wenn die Regressionslinien aufeinander senkrecht ständen. Einen numerischen Ausdruck für dieses Verhalten bildet der Korrelationskoeffizient [1]). Er beruht darauf, daß man die Regressionskurven nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Gerade ausgleicht. Bezeichnet man die Abweichungen vom Mittelwert der beiden Variabeln δC bezw. $\delta C'$ und $1+\alpha$ mit x und y und nimmt den Punkt, der dem Mittelwert beider Variabeln entspricht, zum Koordinatenanfangspunkt, so lauten die Gleichungen der beiden Geraden

$$x_1 = b_1 y_1 \text{ und } y_2 = b_2 x_2.$$

Dann ist als Definition gesetzt $r^2 = b_1 b_2$, das Quadrat des Korrelationskoeffizienten r. Sind die Variabeln zusammenhanglos (wenn die Regressionslinien aufeinander senkrecht stehen), so ist er null. Ist er nicht null, so ist ein Zusammenhang zu vermuten. Praktisch berechnet man r aus der Beziehung

$$r = \frac{\Sigma x y}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2}},$$

wobei der mittlere Fehler dieses Koeffizienten $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ beträgt. In unserem Fall ist für den Zusammenhang von δC und $1+\alpha$ das $r = 0{,}198$ mit einem mittleren Fehler von 0,087 und für den Zusammenhang von $\delta C'$ und $1+\alpha$ das $r' = 0{,}525$ mit einem mittleren Fehler von 0,063. Daß überhaupt für den Zusammenhang von δC und $1+\alpha$ ein von null sich unterscheidender Wert herausgekommen ist, liegt vor allem an der Messung $\delta C = 25$, für $1+\alpha = 1{,}070$. Dies ist ein extremer Wert, der wahrscheinlich auf einem systematischen Fehler beruht. Würde man ihn weglassen, so ergäbe sich ein viel kleinerer Koeffizient r, während sich der Koeffizient r', da hier diese Messung keine extreme Rolle spielt, praktisch nicht ändern würde. Daß der Wert des Koeffizienten r' kleiner ist, als man nach der Abbildung erwarten möchte, liegt daran, daß die Korrelationsmethode die in ein Intervall fallenden Messungen genau so häufig wertet, wie sie vorgekommen sind, während in der Abbildung bei der Mittelwertbildung die Gewichte der einzelnen Messungen nicht berücksichtigt sind und die verschiedenen Punkte daher ein ganz verschiedenes Gewicht besitzen.

Die vorliegenden Koeffizienten berechtigen zu dem Schluß: Die nach der Planckschen Formel gedeuteten Messungen zeigen einen ganz geringen Zusammenhang mit dem Verlauf der von Nernst vorgeschlagenen Korrektur $1+\alpha$, den man als zufällig betrachten kann. Dagegen weisen die nach Nernst gedeuteten Messungen einen ausgesprochenen Gang, entsprechend dem Verlauf der Werte $1+\alpha$, auf. Die Plancksche Formel stellt eine Konstante, die Nernstsche eine vom Verlauf der $1+\alpha$ abhängige Größe dar. Sie ist also keine Formel für die Strahlungsintensität.

5. Das Charliersche Strahlungsgesetz. Charlier [2]) hat versucht, die Energieverteilung im Normalspektrum auf das Gaußsche Verteilungsschema zurückzuführen. Die Energie ist Null für $\lambda = 0$ und für $\lambda = \infty$, hat also dazwischen, da sie überall positiv, ein Maximum. Führt man an Stelle von λ den Logarithmus der Wellenlänge ein, so läuft dieser von $-\infty$ bis $+\infty$. Setzt man also $y = \lg \lambda$, so geht der Charliersche Ansatz dahin, daß die Verteilung der Energie über y durch die Brunssche Reihe wiedergegeben werden kann. Praktisch untersucht hat Charlier nur den Fall, daß die Reihe beim ersten Glied abbricht. Dann lautet die Annahme, daß die Verteilung dem Gaußschen Gesetz genügt.

Demnach ist

$$E_y = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(y-M)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dies entspricht dem Galtonschen Fehlergesetz. Zur Bestimmung der Konstanten k, σ, M verwendet man 3 Gesetze, die aus der Theorie bekannt sind.

---

[1]) Vergl von neueren Deutschen Darstellungen H. Gravelius, diese Zeitschr. 1, 1920, S. 199 bis 205 und P. Riebesell, ebenda 2, 1922, S. 195 bis 198 und die umfangreiche englische Originalliteratur, zitiert bei G. U. Yule, An introduction to the theory of statistics, London 1912.

[2]) Arkiv for Mathematik, Fysik och Astronomie, Bd. 9, 1913/14, Nr. 11.

a) Das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz, wonach die gesamte, von einem schwarzen Körper ausgestrahlte Energie für alle Wellenlängen proportional der 4. Potenz der absoluten Temperatur ist, daß also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_\lambda \, d\lambda = a\, T^4.$$

b) Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz ist die spezifische Helligkeit proportional λ^{-5} multipliziert mit einem Ausdruck, der nur eine Funktion von λT ist. Erste Folgerung daraus ist, daß es eine Wellenlänge λ_m gibt, für die die Strablungsintensität ein Maximum besitzt, wobei $\lambda_m T = b =$ konst.

c) Weiter folgt aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz, daß diese Strahlungsintensität $E_{\max}$ proportional der 5. Potenz der Temperatur, also daß $E_{\max} = C T^5$.

Bestimmt man so die Konstanten k, σ und M aus den numerisch bekannten a, b, C und kehrt man dann von der Verteilung der y zur Verteilung der λ zurück, so wird

$$E_\lambda = \text{konst. } T^5 \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\lg \frac{\lambda T}{b}\right)^2},$$

wobei sich σ aus den Konstanten a, b, C durch eine transzendente Gleichung berechnen läßt. Führt man wieder die Größe $x = \frac{ch}{k\lambda T}$ ein, so läßt sich das Zutreffen dieses Gesetzes an Hand der Messungen von Rubens wieder mit Hilfe des oben geschilderten Schemas untersuchen.

Man braucht den Ausdruck mit Hilfe geeigneter Multiplikation nur auf die Form zu bringen

$$\frac{E_\lambda}{x^5} \, e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(\lg \frac{ch}{kb}\frac{1}{x}\right)^2} = \text{konst.} \left(\frac{ch}{\lambda k}\right)^5 = C'',$$

so muß wieder die rechte Seite nur von der Wellenlänge abhängen, also für monochromatische Messungen unabhängig von der Temperatur, nur den von Meßfehlern herrührenden Schwankungen unterworfen sein. Doch erübrigt sich die Anwendung der Methode hier, weil die Formel eine wesentliche Konsequenz enthält, die von der Erfahrung nicht bestätigt ist. Die spezifische Strahlungsintensität hätte nämlich danach für konstante Wellenlängen ein von der Temperatur abhängiges Maximum. Die Messungen von Rubens ergeben aber in Uebereinstimmung mit dem Planckschen Gesetz, daß für Isochromaten die Energie mit wachsendem T wächst im Widerspruch zum Ansatz von Charlier, so daß das Charliersche Strahlungsgesetz zu verwerfen ist.

Zusammenfassung. Die aus der Fehlertheorie, der Kollektivmaßlehre und der Korrelationstheorie entnommenen Kriterien führen uns zu dem übereinstimmenden Schluß, daß nach den Messungen von Rubens die Nernstsche Formel abzulehnen ist und die ursprüngliche Plancksche Formel bestätigt wird. Das Charliersche Strahlungsgesetz ist zu verwerfen. 158

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie.[1]

Von **H. HENCKY** in Delft.

Daß in der mathematischen Physik die linearen Differentialgleichungen eine so vorherrschende Rolle spielen, ist kein Zufall und auch nur in beschränktem Maße ein reines Erfahrungsergebnis. Es ist dies vielmehr in gewissem Sinne das Ergebnis einer sehr allgemein vollzogenen Potenzentwicklung, bei der man die höheren Glieder vernachlässigt hat. So genau eine derartige Näherung die Erscheinungen auch darstellen mag, es gibt doch immer Erscheinungsgruppen, wo die Annäherung versagt

[1] Dieser Bericht bringt nur eine kurze Uebersicht über die neuere Literatur. Auf die sachlichen Probleme wird in späteren Einzelberichten näher eingegangen werden. Der Herausg.

und wo man die höheren Glieder heranziehen muß. Eine solche Gruppe, bei der die Linearisierung des Problems unzulänglich wird, d. h. nicht zur Beantwortung aller Fragen ausreicht, haben wir in den Stabilitätsproblemen der Elastizitätslehre vor uns.

In zweifacher Weise wird das Problem der Elastizitätstheorie künstlich linearisiert. Einmal in kinematischer Beziehung, indem man nämlich unendlich kleine Deformationen voraussetzt, wodurch man sich die Möglichkeit einer Superposition der elastischen Verschiebungen sichert, dann auch in Hinsicht auf die Ursache der Deformationen, indem man lineare Beziehungen zwischen Kraft und Deformation voraussetzt. Demgemäß erkennen wir schon im voraus die Notwendigkeit, die Stabilität unter zwei verschiedenen Voraussetzungen zu behandeln,

1. unter Annahme des Hookeschen Gesetzes,

2. unter Annahme eines Gesetzes, welches auch den Uebergang zum plastischen Zustand (Fließen) noch berücksichtigt.

Die Behandlung des Problems erfordert vor allem eine klare Definition der Begriffe Stabilität und Instabilität. Als solche hat sich die Definition von Love-Bryan[1]) bewährt. Danach ist eine Gleichgewichtslage immer stabil, wenn sie die einzig mögliche ist und wenn die potentielle Energie der angreifenden und der elastischen Kräfte einen Kleinstwert hat.

Ueber die Methoden zur Lösung von Stabilitätsproblemen mag hier folgendes bemerkt werden[2]).

Der allgemeinste Vorgang bei Lösung von Stabilitätsproblemen besteht darin, die Kräfte, welche durch elastische Verschiebungen erzeugt werden, zu berücksichtigen. Man erhält auf diese Weise nach konsequenten Vernachlässigungen homogene lineare Differentialgleichungen, deren Eigenwerte die Stabilitätsgrenzen liefern.

In solchen Fällen, in denen die Differentialgleichung in einfacher Form nicht gelöst werden kann, empfiehlt sich ein Verfahren, dessen ausführliche Darlegung und Anwendung wir Timoschenko[3]) verdanken. Bezeichnen wir mit y die Ausbiegungen eines axial gedrückten Stabes, so ist die potentielle Energie der Biegung bekanntlich (E Elastizitätsmodul, J Trägheitsmoment) $V = \frac{EJ}{2}\int y''^2\,ds$. Die Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich aus der Stabverkürzung infolge der Biegung zu $P\,{}^1/_2 \int y'^2 ds$. Im Knickfall muß diese Arbeit gerade gleich der potentiellen Energie sein, d. h. $P_k = \frac{EJ\int y''^2\,ds}{\int y'^2\,ds}$. Man kann nun für y eine beliebige die Randbedingungen befriedigende Reihe ansetzen und nach einem von Ritz[4]) angegebenen Verfahren die Koeffizienten dieser Entwicklung so bestimmen, daß P_k ein Minimum wird. Das Verfahren ist natürlich auf den speziellen Fall des geraden axial gedrückten Stabes nicht beschränkt und gerade darin besteht seine praktische Bedeutung.

Auch dieses Verfahren hat aber Grenzen für seine Anwendung. Man kann dann eine in der Tat allgemein verwendbare Methode einschlagen, die wenn auch oft um den Preis umständlicher Rechnungen, doch immer zu dem gewünschten Ziele führt. Es ist dies das Rechnen mit endlichen Differentialen, d. h. der Uebergang von der Differentialgleichung zu Differenzengleichungen[5]). Dieses Verfahren gestattet auch eine sehr anschauliche Deutung, es besteht in der Verwandlung des kontinuierlichen Systems in eine Kette starrer Teile, die durch elastische Gelenke[6]) verbunden sind. An dieser

---

[1]) G. H. Bryan, Cambridge Phil. soc. Proc. 6 (1889), S. 199. A. E. Love, Lehrbuch der Elastizität, dtsch. von Timpe, Leipzig 1907, S. 470.

[2]) Zusammenfassende Werke: A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, II. Bd., München 1920. R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Berlin 1921.

Vgl. ferner das Referat über Festigkeitsprobleme im Maschinenbau von Th. v. Kármán, Encyklop. der math. Wiss. Bd. IV, 27, S. 370 u. f.

[3]) Timoschenko, Sur la stabilité des systèmes élastiques, Ann des ponts et chaussées Fasc. III, IV u. V, 1913 (Uebersetzung einer älteren russischen Arbeit desselben Verfassers).

[4]) Ritz, Journal für reine und angewandte Math., 135 (1909): Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme.

[5]) Vergl. hierzu v. Mises, Ueber die Stabilität rotierender Wellen, Monatshefte für Math. u. Phys., 22, 1911, S. 33 bis 52.

[6]) H. Rode, Beitrag zur Theorie der Knickerscheinungen mit Anwendungen im Eisenbau, Dissertation, Hannover 1916.

H. Hencky, Ueber die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum mittels der elastischen Gelenkkette, Der Eisenbau, 1920, S. 438 bis 452.

Stelle verdient auch die graphische Methode von Vianello[1]) Erwähnung. Sie beruht auf den bekannten Eigenschaften des Seilpolygons, welche Mohr zur Konstruktion der elastischen Linie eines gebogenen Balkens benutzt hat. Um die Knicksicherheit eines axial gedrückten Stabes zu finden, nimmt Vianello eine virtuelle Verschiebung der Gleichgewichtslage an und rechnet oder zeichnet mit Hilfe des Seilpolygons die zugehörige Momentenlinie. Durch ein zweites Seilpolygon bekommt man jetzt eine neue Biegelinie. Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die Biegelinie der anfänglichen Annahme affin zur verbesserten Biegelinie ist.

Wie Marcus[2]) gezeigt hat, besitzt das Seilpolygon ein genaues zweidimensionales Gegenstück, das man zweckmäßig als elastisches Gewebe oder Seilpolygonkette bezeichnen kann. Dieses elastische Gewebe oder Netz von sich überkreuzenden Seilpolygonen steht nun zur gebogenen ebenen Platte in demselben Verhältnis wie das Seilpolygon zum Balken. Zu allen Konstruktionen, welche sich mit dem Seilpolygon ausführen lassen, existiert ein genaues Gegenstück mit dem elastischen Gewebe. Sämtliche Knickprobleme, welche sich an plattenförmigen Konstruktionsteilen ergeben können, lassen sich auf diese Weise nunmehr behandeln und zwar mit einem erstaunlich einfachen mathematischen Apparat.

Außer diesen beschriebenen Methoden gibt es noch zwei Verfahren, denen eine gewisse Willkür anhaftet, die aber doch zur Abschätzung der Knickgefahr manchmal brauchbar sein können. Das eine Verfahren besteht darin, daß man an dem auf Stabilität zu untersuchenden Konstruktionsteil eine Lastgruppe anbringt, welche eine ähnliche Deformation ergibt wie die wirkliche Knicklast. Diese so erhaltene Biegelinie legt man nun der weiteren Berechnung zugrunde[3]).

Das andere Verfahren hat einen sehr allgemeinen Charakter, man könnte es als Variation der kinematischen Bedingungen bezeichnen. Es liegt vielen Näherungstheorien der technischen Elastizitätslehre zugrunde und besteht im wesentlichen darin, daß man den Elastizitäts- bezw. Schubmodul eines Konstruktionsteils 0 oder ∞ setzt, wodurch man zwei Grenzen erhält, zwischen denen das wirkliche Verhalten der untersuchten Konstruktion schwanken muß.

1. Stabilität des geraden vollwandigen oder gegliederten Stabes mit axialer Belastung. Das Problem des geraden axial gedrückten Stabes ist bekanntlich für schlanke Stäbe schon von Euler erledigt worden.

Die Theorie des gedrungenen Knickstabes dagegen (Knickspannung > Spannung an der Proportionalitätsgrenze) wurde erst von Engesser in Angriff genommen, eine versuchsmäßige Lösung verdanken wir v. Tetmajer[4]). Zu einem wissenschaftlich vollständig befriedigenden Abschluß ist diese Frage durch v. Kármán[5]) geführt worden. v. Kármán hat auf Grund von theoretischen und sehr sorgfältigen experimentellen Untersuchungen gefunden:

1. Die Eulersche Formel gibt bei sehr schlanken Stäben, wenn die Knickspannung unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegt und die Randbedingungen des Versuchs mit denen der Rechnung übereinstimmen, sehr genau die wirklichen Verhältnisse wider.

2. Bei Ueberschreitung der Propornationalitätsgrenze ist an Stelle des Elastizitätsmoduls E in den Eulerschen Formeln ein bestimmter, für jeden Querschnitt berechenbarer Knickmodul T zu setzen, der einen Mittelwert zwischen dem Modul der gesamten und der elastischen Formänderungen darstellt.

3. Die Tetmajerschen empirischen Formeln ergeben für Flußeisen einen gewissen Ueberschuß an Sicherheit.

Man muß bedenken, daß es sich im Bauwesen fast stets um den Fall der unelastischen Knickung handelt. Nur ganz leicht gehaltene Konstruktionsteile wie Wind- und Horizontalverbände in Eisenkonstruktionen machen davon eine Ausnahme. Die

[1]) Vianello, Z. d. V. d. I. 1898, S. 1436.

[2]) Marcus, Armierter Beton, 1919, S. 107 u. f.

[3]) Vergl. hierzu H. Kayser, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, herausgegeben vom V. d. I., Heft 207. Beziehungen zwischen Druckfestigkeit und Biegungsfestigkeit.

[4]) L. v. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und zusammengesetzten Druckfestigkeit. 3. Aufl., Wien 1903.

[5]) v. Kármán, Untersuchungen über Knickfestigkeit. Dissertation, Göttingen 1909.

allgemeine Knickformel lautet $\sigma_k = \pi^2 T \left(\frac{i}{l}\right)^2$, wobei l die Knicklänge (von Wendepunkt zu Wendepunkt), i der Trägheitsradius des Querschnitts und σ_k die Knickspannung. Die empirische Tetmajersche Formel lautet $\sigma_k = \alpha - \beta \left(\frac{l}{i}\right)$, wobei α und β feste für die verschiedenen Stoffe verschiedene Koeffizienten. Eliminiert man hier $\frac{l}{i}$ aus den beiden Gleichungen, so ergibt sich für den Knickmodul $T = \frac{\sigma_k (\alpha - \sigma_k)}{\pi^2 \beta^2}$ eine Formel, die bei den Anwendungen auf kompliziertere Querschnitte eine Rolle spielt, für welche eine theoretische Berechnung von T nicht ohne weiteres möglich ist.

Häufig zieht man es vor, aus Gründen der Material- und Gewichtsersparnis die Druckstäbe nicht vollwandig auszuführen, sondern 2 oder 4 Vollwandstäbe durch 2 oder 4 Fachwerkscheiben zu einem Ganzen zu verbinden. Man hat zur Berechnung derartiger gegliederter Druckstäbe verschiedene Wege eingeschlagen. Zunächst läßt sich das Problem stets reduzieren auf die Untersuchung einer Tragwand gegen Ausknicken in ihrer Ebene. Da die Gurtungen durchlaufen, so ist das System stets hochgradig statisch unbestimmt [1]). Die Momente, welche in den Gurtungen auftreten, sowie die Stabkräfte der Vergitterung lassen sich durch die Verschiebungen der Knotenpunkte ausdrücken. Stellt man nun die Gleichgewichtsbedingungen auf, so erhält man ein System von homogenen Gleichungen mit den Knotenpunktsverschiebungen als Unbekannten, deren Zahl ebenso groß ist wie die Zahl der Unbekannten. Das Verschwinden der Nennerdeterminante dieses Systems liefert die Knickbedingung. Natürlich ist es unmöglich, die Rechnung in dieser Strenge praktisch zu verwirklichen. Müller-Breslau [2]) macht daher eine Reihe von Vereinfachungen, die im wesentlichen darauf hinauslaufen, daß man den mehr oder weniger vollwandartigen Charakter eines solchen Fachwerkes berücksichtigt. Müller-Breslau erhält schließlich die Knickkraft für den Gitterstab in der Form $P_k = \varkappa \varkappa' \pi \frac{\pi^2 E J}{l^2}$, wobei $\varkappa'$ ein nur von der Felderteilung abhängiger, $\varkappa$ ein von den Dimensionen der Vergitterung abhängiger Wert ist.

Für Rahmenstäbe läßt sich die Knickkraft auf die Form $P_k = \alpha \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ bringen, wo α ein Abminderungskoeffizient. Handelt es sich um einen Fall unelastischer Knickung, so setzt man an Stelle des Elastizitätsmoduls den Knickmodul T, der unter Benutzung der Tetmajerschen Formel auch als Funktion der Knickspannung geschrieben werden kann.

Zeichnet sich die von Müller-Breslau herrührende Theorie durch ihre wissenschaftliche Strenge und Vollständigkeit aus, so hat das von Engesser [3]) eingeschlagene Verfahren den Vorzug einer größeren Uebersichtlichkeit und Einfachheit. Engesser geht von der Annahme aus, daß die Biegelinie des gegliederten oder Rahmenstabes eine Sinuswelle sein wird. Wegen der Nachgiebigkeit der Querverbindungen entsteht zu der Durchbiegung des vollwandig gedachten Stabes noch eine zusätzliche Sinuswelle [4]). Das Verhältnis der Amplituden der Sinuswellen für den Vollwandstab und für den Stab mit elastischen Querverbindungen gibt dann sofort den Abminderungskoeffizienten α in der Formel $P_k = \alpha \frac{\pi^2 E J}{l^2}$, was sich durch Anschreiben der Differentialgleichungen leicht zeigen läßt. Die Formeln von Engesser stimmen in der Hauptsache mit den Formeln von Müller-Breslau überein.

Obgleich diese beiden Verfahren von Engesser und Müller-Breslau die wissenschaftlich befriedigendste Lösung darstellen, haben sie sich bisher in der Praxis nicht einbürgern können. Es liegt dies daran, daß die Benutzung dieser Methoden immerhin den Arbeitsaufwand für eine Bauwerksberechnung nicht unwesentlich vergrößern würde.

---

[1]) betr. die Theorie vergl. das Referat von K. Wieghardt, Spezielle Fragen aus der Theorie der Fachwerke. Encyklopädie der math. Wiss., IV. 29 C.

[2]) Müller-Breslau Neuere Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig 1913, S. 415 u. f.

[3]) F. Engesser, Ueber die Knickfestigkeit von Rahmenstäben, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1909, S. 136. Knicksicherheit von Gitterstäben. Z. d. V. d. I. 1908, S. 359.

[4]) Es handelt sich hier eigentlich um eine Taylorsche Entwicklung, wobei das erste Glied der Stab mit unendlich steifen Querverbindungen ist.

H. Kayser[1]) schlägt vor, auf die Berücksichtigung der unelastischen Knickung ganz zu verzichten und dafür mit einem anfänglich nach einer Sinuswelle ausgebogenen Stab zu rechnen, wobei man den Biegungspfeil allerdings willkürlich annehmen muß. Begründen läßt sich dieser Vorschlag damit, daß infolge der stets vorhandenen Exzentrizität des Kraftangriffs die Einführung eines für zentrische Belastung gültigen Knickmoduls doch auch etwas unsicher ist.

In der Praxis mehr Beachtung hat ein anderer von Krohn[2]) angegebener Weg zur Abschätzung der Knickgefahr gegliederter Druckstäbe gefunden. Allerdings sind diese Formeln rein empirisch und gründen sich einerseits auf die Annahme, daß die Knickkraft eines Stabes um so kleiner ist, aus je mehr Teilen sich der Stab zusammensetzt, andererseits auf die Tetmajerschen Formeln. Trotzdem sie daher für die elastische Knickung nicht am Platze sind, werden sie viel gebraucht, weil man dabei die Dimensionen der Querverbindungen noch nicht zu kennen braucht.

Ein interessanter Sonderfall eines gegliederten Systems ergab sich bei der Aufstellung der Entwürfe zur Erbauung einer Straßenbrücke über den Rhein bei Köln[3]). Bei dem Entwurf einer Hängebrücke war der Horizontalzug der Kette zurückgeleitet in den Versteifungs- und Fahrbahnträger, so daß die Frage nach der Stabilität eines derartigen Systems in der Tragwandebene entstand. Untersuchungen von Engesser und R. Mayer[4]) zeigen aber, daß diese Anordnung im allgemeinen stabil ist. Modellversuche bestätigten dieses Ergebnis.

Eine Reihe von Sonderfragen der Stabknickung ist bei der Holmberechnung im Flugzeugbau aufgetreten; darüber ist in dem Bericht über die Probleme der Flugzeugstatik referiert worden[5]).

2. Stabilität des krummen Stabes in seiner Ebene. Eine besondere Stellung nehmen die Stabilitätsprobleme ein, welche sich auf gekrümmte Stäbe beziehen, weil hier auch senkrecht zum Stab gerichtete Lasten Instabilität ergeben können. Hierher gehört das Einbeulen von Rohren unter äußerem Ueberdruck in der elementaren Auffassung als allseitig gedrückter Kreisring. Im Bauwesen handelt es sich häufig um die Stabilität von Bogenbrücken. Das Problem des kreisförmigen Bogens wurde von R. Mayer[6]) für verschiedene Randbedingungen und Belastungen behandelt. In seinem Buche: Die Knickfestigkeit[7]) gibt Mayer die Lösung für den gelenkig gelagerten und den eingespannten Bogen und berichtet über Modellversuche an einem Bogen von 180 cm Stützweite und 24 cm Pfeilhöhe, welche eine sehr gute Uebereinstimmung mit den theoretischen Formeln erkennen ließen. F. Bleich[8]) untersucht in einer umfangreichen Arbeit auch die Stabilität biegungssteifer gebrochener Stabzüge.

3. Stabilität des geraden und krummen Stabes gegen räumliche Verzerrung. Wenn die Mittellinie eines Stabes sich beim Knickvorgang in eine Raumkurve verwandelt, so bezeichnet man diesen Vorgang nach Prandtl[9]) nicht als Knicken, sondern als Kippen. Beim geraden Stab ist das Kippen durch die Torsionssteifigkeit bestimmt, der krumme Stab dagegen kann auch bei unendlich großer Torsionssteifigkeit kippen. Die Kippsicherheit des einfachen Balkens für verschiedene Belastungen und Randbedingungen hat bereits Prandtl in seiner Dissertation untersucht.

---

[1]) H. Kayser, Die Knickversteifung doppelwandiger Druckquerschnitte. Der Eisenbau, 1910.

[2]) Krohn, Beitrag zur Untersuchung gegliederter Stäbe, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1908, S. 559.

R. Mayer, Zur Knickfestigkeit gegliederter Stäbe, Zeitschr. des österr. Architekt.- u. Ing.-Vereins, 1914, Heft 13.

[3]) K. Bernhard, Engerer Wettbewerb um die Erbauung einer Straßenbrücke bei Köln Z. d. V. d. I. 1913, S. 1170.

[4]) R. Mayer, Die Knickfestigkeit, S. 111 u. f.

[5]) J. Ratzendorfer, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 47 bis 61.

[6]) R. Mayer, Ueber Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens, Zeitschrift für Math. u. Phys. 1912, S. 206.

[7]) R. Mayer, Die Knickfestigkeit, S. 143.

[8]) F. Bleich, Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen, Der Eisenbau, 1919, Nr. 2, 4, 6 und 8.

[9]) L. Prandtl, Kipperscheinungen, Dissertation 1899.

H. Reißner, Stabilität der Biegung, Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft.

Eine Nachlese der von Prandtl noch unerledigten Kippfälle rührt von Dinnik[1]) her. Dinnik behandelt unter anderem den Balken mit einer Einzellast, welche nicht in der Mitte angreift, sowie Lasten, welche ihren Angriffspunkt nicht in der Balkenmittellinie, sondern höher oder tiefer haben. Die Kipperscheinungen an Walzwerk- und Doppel-T-Profilen hat Timoschenko[2]) untersucht.

Ueber krumme Stäbe liegen nur wenig Untersuchungen vor. H. Hencky[3]) erhält eine einfache Formel für den Eintritt der Achterbildung bei einem allseitig gedrückten Kreisring.

Die Kippsicherheit gebrochener Stabzüge und flacher Bogen behandelt H. Hencky[4]) mittels der elastischen Gelenkkette. Es ergibt sich, daß bei einem gebrochenen biegungssteifen Stabzug oder einem krummen Stab auch Zugkräfte in der Sehnenrichtung Instabilität hervorrufen können. Eine praktische Anwendung können diese Untersuchungen finden auf die Kipperscheinungen an Bogenträgern und Rahmen. In einem dem Verfasser bekannt gewordenen Fall hat die Verkennung der Kippgefahr zu einer endlichen Deformation eben montierter Zweigelenkrahmen und zu einer nachträglichen Abänderung der ursprünglichen geplanten Konstruktion geführt.

Obgleich Kipperscheinungen seltener auftreten und meist nur mit bleibenden Deformationen, nicht mit Zerstörung des Bauwerkes endigen, können sie doch sehr gefährlich werden, weil die Herabsetzung der Knickgrenze bei kombinierten Kipp- und Knickproblemen eine sehr große ist.

Die Uebertragung der Tetmajerschen Formeln für den Fall der unelastischen Knickung ist hier nicht ohne weiteres möglich, weil man ja über den Einfluß der Torsion nichts Sicheres weiß. Arbeiten über diese Fragen scheinen noch nicht vorzuliegen.

4. Stabilität des geraden und krummen Stabes mit elastischer Querstützung. Das Hauptanwendungsgebiet für die Theorie des elastisch gestützten Stabes ist die Berechnung der Obergurte oben offener Brücken, wobei der obere versteifende Horizontalverband entweder ganz oder teilweise fehlen kann. Es ist also eigentlich eine Kipperscheinung, um die es sich hier handelt, man umgeht aber das Kippproblem, indem man den Obergurt unter dem Bilde eines elastisch quergestützten Stabes betrachtet. Die ersten grundlegenden Arbeiten über dieses Problem verdanken wir Zimmermann[5]).

Die Sicherheit der Obergurte oben offener Brücken hat Engesser[6]) unter vereinfachenden Bedingungen untersucht. Ersetzt man nämlich die in den Knotenpunkten durch die Pfosten bewirkte elastische Querstützung durch eine kontinuierlich verteilte im Durchschnitt statisch gleichwertige Stützung, und betrachtet die dem Knickfall entsprechende Ausbiegung als Sinuswelle, so muß die innere Arbeit wieder der äußeren Arbeit der Knickkraft gleich sein. Aus dieser Gleichsetzung ergibt sich die Knickkraft. Die unbekannte Länge der halben Sinuswelle ermittelt man aus der Bedingung, daß die Knickkraft ein Minimum werden muß. Die Kraft des elastischen Widerstandes mißt man durch Anbringen der Krafteinheit am Pfosten und Ermittlung der Ausbiegung. Auch der Uebergang zur unelastischen Knickung läßt sich ebenso wie beim Stab durchführen.

Engesser hat später seine Ergebnisse auch durch Modellversuche[7]) an einem 1 m langen Flacheisenband geprüft, der Versuchsstab war dabei durch elastische Ständer gestützt, deren Abstand beliebig verändert werden konnte. Diese Versuche, die mit Spannungen innerhalb der Elastizitätsgrenze des Materials durchgeführt wurden, bildeten eine willkommene Bestätigung der Theorie.

Die Ansätze Müller-Breslaus[8]) sind wesentlich allgemeiner. Auf Grund der Theorie des mehrfeldrigen Stabzuges mit elastischen Einzelstützen ergibt sich die Knickbedingung

---

[1]) A. N. Dinnik, Ueber die Kipperscheinungen. Mitteilungen des donischen polytechnischen Instituts, 1913, Bd. II, Abt. II (in russischer Sprache).

[2]) Timoschenko, Sur la stabilité des systèmes élastiques; ferner Zeitschrift für Math. und Phys., 1910, S. 378: Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie.

[3]) H. Hencky, diese Zeitschrift, 1, 1921, 451 bis 455.

[4]) H. Hencky, Der Eisenbau, 1920, S. 438, Ueber die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raum.

[5]) H. Zimmermann, Die Knicksicherheit eines Stabes mit elastischer Querstützung, Berlin 1906; ferner Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Berliner Akademie, 1905, 1907, 1909.

[6]) Engesser, Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken, Berlin 1893, Bd. II, S. 142.

[7]) F. Engesser, Versuche und Untersuchungen über den Knickwiderstand des seitlich gestützten Stabes. Der Eisenbau, 1918, S. 28.

[8]) Müller-Breslau, Graph. Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, 2 Abt., Leipzig 1908, S. 309 u. f.

in Gestalt einer Determinante $n$ten Grades, wenn die Brücke n Felder besitzt. Einen unteren Näherungswert für die Knickkraft erhält Müller-Breslau, indem er in den Knotenpunkten der Gurtung Gelenke voraussetzt.

Mit der Berechnung der Druckgurte offener Bogenbrücken beschäftigt sich eine Arbeit von Briske[1]).

5. Die Stabilität ebener Platten. Bildet man einen Stab nach dem Gesichtspunkt der größtmöglichen Materialersparnis aus, so kommt man bald zu einem Gebilde, welches sich aus einzelnen plattenförmigen Stücken zusammensetzt. Es kann dann vorkommen, daß bei Druckbeanspruchungen der Querschnitt des Stabes eine endliche lokale Deformation erfährt. Hieraus ergibt sich für die Praxis die Notwendigkeit, über die Stabilität von Platten unter passend gewählten Randbedingungen Regeln aufzustellen.

Die Stabilität von T- und L-Profilen untersuchen Timoschenko und Reißner[2]).

Die Knickkraft der freigelagerten und der am Rand eingespannten Kreisplatte bei allseitig auf die Ränder wirkenden Druckkräften in der Mittelebene berechnet Dinnik[3]). Die Knicklasten verhalten sich etwa wie 1 : 3,5 für diese beiden Randbedingungen. In der gleichen Arbeit wird auch die Stabilität der elastisch gestützten Kreisplatte behandelt.

Für die gleichen Probleme, offenbar unabhängig von den russischen Arbeiten, findet auch H. Rode[4]) eine Lösung. Rode sucht außerdem in systematischer Weise aus der Lösung von Stabilitätsproblemen für plattenförmige Körper Anhaltspunkte zur Formgebung der Querschnitte im Eisenbau zu gewinnen. Die nötigen Unterlagen hierzu schafft er sich, indem er die rechteckige Platte für eine Reihe typischer Randbelastungen und Randbedingungen untersucht; auf diese Weise gelingt es, übersichtliche Regeln für die lokale Stabilität der üblichsten Profile zu gewinnen.

6. Die Stabilität von Schalen. Mit Rücksicht auf die analytischen Schwierigkeiten suchte man von jeher bei den Schalenproblemen die Ansätze weitgehend zu vereinfachen. Man unterscheidet im wesentlichen zwei Arten von Schalendeformationen, die Fältelung ohne Dehnung der Mittelebene und die allgemeine Deformation, welche sich in eine Verbiegung und in eine Verzerrung der Mittelebene zerlegen läßt.

Ein Beispiel für eine reine Fältelung ist die elementare Behandlung der Stabilität von Zylinderschalen bei äußerem Ueberdruck. Unter Berücksichtigung der Verzerrung der Mittelfläche haben diese Aufgabe zuerst R. Lorenz[5]) und Timoschenko unter vereinfachenden Annahmen behandelt. In aller Strenge auf Grund der Theorie dünner Schalen wurde der Fall eines auf äußeren Druck beanspruchten Zylinders von endlicher Länge von R. v. Mises[6]) untersucht. Aus einem Vergleich der Ergebnisse mit den vorliegenden Versuchen, soweit sie den angenommenen Randbedingungen gerecht werden, zieht v. Mises den Schluß, daß die gefundene Formel für den kritischen Druck ebenso zuverlässig ist wie die Eulersche Knickformel.

Für die Stabilität der Kugelschale und Kugelkalotte für symmetrische Lasten und symmetrische Form der Ausbiegung hat Zoelly[7]) Formeln aufgestellt, die von Schwerin[8]) genauer begründet wurden.

Erweiterungen von Stabilitätsuntersuchungen für Schalen und Platten für den Fall der unelastischen Knickung scheinen gegenwärtig nicht vorzuliegen. Die allgemeine Vorschrift, den Elastizitätsmodul E durch die entsprechende Neigung der Dehnungs-Spannungslinie zu ersetzen, kann allerdings auch hier zu einer Abschätzung führen, erwünscht wäre aber eine genauere Untersuchung, wie sie sie durch v. Kármán für den Stab durchgeführt wurde.

[1]) R. Briske, Die Knicksicherheit der Druckpunkte offener Bogenbrücken. Zeitschrift für Arch.- u. Ing.-Wesen, 1911, S. 238.

[2]) H. Reißner, Zentralblatt der Bauverwaltung 1909, S. 93.

S. Timoschenko, Zeitschrift für Math. und Phys., 1910, Heft 4. Mitteilungen der Techn. Hochschule zu St. Petersburg 1906 bis 1907. Mitteilungen der techn. Hochschule zu Kiew 1907 bis 1908.

[3]) A. N. Dinnik, Mitteilungen des donischen Polytechnischen Instituts, 1913, Bd. II, Abt. II (in russischer Sprache). Anwendungen der Besselschen Funktionen in der Elastizitätstheorie.

[4]) H. Rode, Beitrag zur Theorie der Knickerscheinungen mit Anwendungen im Eisenbau, Dissertation, Hannover 1916.

[5]) R. Lorenz, Z. d. V. d. I., 1908, S. 1706.

S. Timoschenko, Zeitschrift für Math. u. Phys. 1910, S. 376.

[6]) R. v. Mises, Z. d. V. d. I., 1914, S. 750.

[7]) R. Zoelly, Dissertation, Zürich 1915. Stabilität der Kugelschale.

[8]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 81 bis 91.

7. Dynamische Stabilität. Von dynamischen Stabilitätsproblemen der Elastizitätstheorie ist bisher nur eines in der Technik von Bedeutung geworden. Es betrifft die Erscheinungen rotierender Wellen, die sich unter dem Einfluß der Fliehkraft ausbiegen. In einer kurz nach Drucklegung des Referats von v. Kármán erschienenen Arbeit von R. v. Mises[1]) sind einige bis dahin noch ungeklärte Unstimmigkeiten aufgeklärt worden. Ueber die neuere, sehr reichhalttge und vielseitige Litteratur auf diesem Gebiete unterrichtet die eben erschienene Neuauflage des Buches von Stodola über Dampfturbinen[2]).

Wir haben am Eingang unserer Betrachtungen bereits hervorgehoben, daß der Knickvorgang mit der Linearisierung der Probleme in einer gewissen Beziehung steht. Aus den linearen Differentialgleichungen gewinnt man niemals vollkommenen Aufschluß über die Verhältnisse an der Stabilitätsgrenze. Setzen wir in die Biegungsformel den richtigen Wert der Krümmung, so erhalten wir eine kubische Differentialgleichung, die auf elliptische Funktionen führt und die Gleichgewichtsformen für Lastgrößen, die nahe der Stabilitätsgrenze liegen, richtig darstellt. Oberhalb der kritischen Lastgrößen ist die Lösung der Differentialgleichung mehrdeutig[3]). Es ist also der nichtlineare Charakter einer Differentialgleichung geradezu eine Voraussetzung für die Möglichkeit des Vorkommens von Instabilität.

Auch in anderen Gebieten der Mechanik kann man von dieser Erkenntnis Gebrauch machen. In der Hydrodynamik ist bereits die Analogie der Turbulenzerscheinung mit einem Knickvorgang hervorgehoben worden. In der Tat liegt auch hier eine quadratische Differentialgleichung der Strömung zugrunde. Wenn es zum Zweck praktischer Anwendungen nützlich ist, die konkrete Seite der Dinge zu betrachten, so macht uns andererseits die Erkenntnis der mathematischen Zusammenhänge frei von den Beschränkungen des Einzelfalles und zeigt uns die invarianten Formen, in welchen sich alles Geschehen notwendig ausdrücken muß. 106

Bisherige Lösungen des Torsionsproblems.

Von **C. WEBER** in Hildesheim.

Zu dem zusammenfassenden Berichte über Lösungen des Torsionsproblems von Herrn Prof. Pöschl (Bd. 1, S. 312 bis 328) möchte ich einige Ergänzungen für die Näherungslösungen bringen.

1. Streifenquerschnitte. Bei einem langen rechteckigen Streifenquerschnitt von der Breite b erhält man mit Ausnahme der Streifenenden einen Spannungshügel mit einem Querschnitt, dessen oberer Rand die Gleichung

$$z = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

hat. Für lange nicht-rechteckige Streifenquerschnitte mit gerader Streifenachse und nicht sich sprungweise ändernder Breite werden die Querschnitte des Spannungshügels ebenfalls annähernd Parabelflächen mit obiger Gleichung für den Oberrand, nur ist der Wert b veränderlich.

So gilt für die lange Ellipse, deren Breiten gleich b gesetzt sind, bei einem Achsenverhältnis $m:1$

$$z = \frac{1}{1+\frac{1}{m^2}}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Die Pfeilhöhe der Parabeln ist hier etwas geringer als nach Gl. (1). Der Unterschied ist jedoch für genügend lange Ellipsen nur gering; für $m = 5$ z. B. nur 4 vH.

[1]) R. v. Mises, Ueber die Stabilität rotierender Wellen. Monatshefte für Math. und Physik, 22, 1911, S. 33 bis 52.

[2]) A. Stodola, Die Dampf- und Gasturbinen, 5. Aufl., Berlin 1922, S. 358 bis 397, 917 bis 937.

[3]) Vgl. z. B. C. J. Kriemler, Labile und stabile Gleichgewichtsfiguren vollkommen elastischer auf Biegung beanspruchter Stäbe, Karlsruhe 1902.

Wird der Stabquerschnitt durch zwei sich schneidende Gerade begrenzt, so daß sich ein unendlich langer Streifen mit dem Spitzenwinkel 2α bildet, so lautet die Gleichung des Spannungshügels:

$$\varphi = \frac{1}{\cos 2\alpha}\,(x^2 \sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha) = \frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2\right].$$

Auch hierfür kann für kleine Winkel α Gl. (1) genommen werden, da dann $\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} \infty 1$ wird; so ist für $\alpha = 8^0$ . . . $\frac{\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1{,}02$.

Man begeht keinen zu großen Fehler, wenn man Gl. (1) für beliebige Streifenquerschnitte mit gerader Längsachse, die mit der X-Achse zusammenfalle, nimmt.

Erstreckt sich der Streifen von x_1 bis x_2, so gilt dann für das Moment die Näherungsgleichung:

$$M = {}^1/_3\, G\,\omega \int_{x_1}^{x_2} b^3\, dx.$$

Ist der Streifen an den Enden ähnlich dem Rechtecke stumpf abgeschnitten, so daß man die Endbreiten b_1 und b_2 erhält, so sind für den Abfall des Spannungshügels an den Enden als weitere Verbesserung der Momentengleichung die Glieder ${}^1/_3\, G\,\omega\, 0{,}315\, b_1^4$ und ${}^1/_3\, G\,\omega\, 0{,}315\, b_2^4$ abzuziehen. Die Gleichung für das Moment lautet somit:

$$M \infty {}^1/_3\, G\,\omega\left[\int_{x_1}^{x_2} b^3\, dx - 0{,}315\,(b_1^4 + b_2^4)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Für die Randspannung gilt mit Ausnahme der Streifenenden

$$\tau \infty G\,\omega\, b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Gl. (2) und (3) sind besonders für die Flansche der üblichen Walzeisenquerschnitte geeignet.

Auf für nicht zu stark gekrümmte Streifen kann Gl. (2) angewandt werden, nur ist nicht nach dx, sondern nach ds, entlang der gekrümmten Mittellinie des Streifens, zu integrieren. Die Randspannungen werden in der hohlen Seite etwas größer, in der erhabenen etwas geringer, als Gl. (3) ergibt.

2. Zusammengesetzte Querschnitte. Querschnitte, die aus Teilen (Rechtecken, Ellipsen usw.) bestehen, die durch Streifen verbunden sind, so daß jedoch nur einfach zusammenhängende neue Querschnitte entstehen, sind auf folgende Weise zu untersuchen. Für alle Teile, einschließlich der Verbindungsstreifen, sind die Momente und Spannungen als Funktion der Querschnittsabmessungen und des Ausdruckes $G\,\omega$ zu finden. Das Moment des zusammengesetzten Querschnittes ist dann annähernd gleich der Summe der Momente der Einzelteile, die Spannungen bleiben unverändert bis auf die Verbindungsstellen, in denen ein Uebergang der Spannungen aneinander stoßender Teile auftritt. Die Richtigkeit dieser Annäherung kann man sich durch das Prandtlsche Seifenhautgleichnis veranschaulichen.

Dies Verfahren ist von A. Föppl ausführlich für Querschnitte, die aus schmalen Rechtecken bestehen, dargelegt (A. Föppl: Ueber den elastischen Verdrehungswinkel eines Stabes, Sitzungsbericht der Bayer. Akad. d. Wissenschaften) und wird hiermit auch auf anders geformte, zusammengesetzte Querschnitte übertragen.

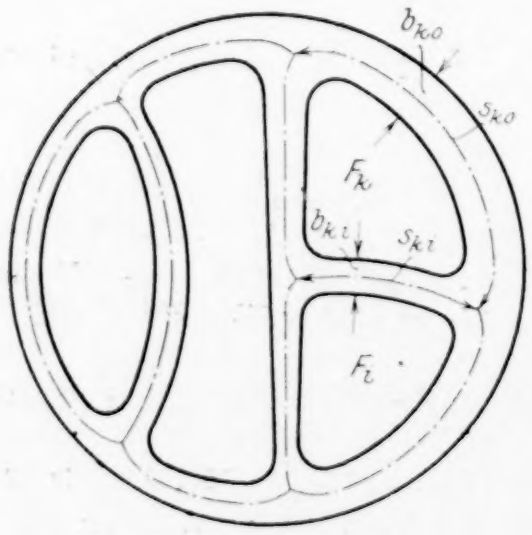


Abb. 1

Es lassen sich hiermit hinlänglich genau alle Walzeisenprofile untersuchen.

3. Aus Streifen gebildete, mehrfach zusammenhängende Querschnitte. Die sich hierbei bildenden Hohlräume werden nach dem hydrodynamischen Gleichnis von Flüssigkeitsmengen ${}^i\!F_1$, ${}^i\!F_2$ . . . ${}^i\!F_n$ umströmt. Nach dem Seifenhautgleichnis sind die ${}^i\!F$-Werte die Höhenunterschiede der Seifenhaut zwischen der äußeren Querschnittsbegrenzung und den inneren Begrenzungen der Hohlräume. Die Größe $G\,\omega\,{}^i\!F_k$ stellt die Schubkraft dar, die in einem Längsschnitt zwischen der $k$ten Höhlung und dem Außenraume des ge-

drehten Stabes von der Länge 1 in Längsrichtung wirkt. Zwischen benachbarten Hohlräumen wirkt entsprechend die Schubkraft $G\omega\,({}^{i}\Psi_k - {}^{i}\Psi_i)$. Zeichnet man die Mittellinien der Streifen nach Abb. 1 ein, so bildet sich um jeden Hohlraum ein geschlossener Linienzug, für den $k$ten Hohlraum von der Länge $s_k = s_{ko} + \Sigma s_{ki}$, wo s_{ki} die Längen für benachbarte Höhlungen sind. Die umschlossene Fläche ist F_k, die Streifenbreiten b_{ko} bezw. b_{ki}, die mittlere Spannung, die annähernd gleich der Spannung der Mittellinien ist, wird:

$$\tau_{ko} = \frac{G\omega\,{}^{i}\Psi_k}{b_{ko}}, \text{ bezw. } \tau_{ki} = \frac{G\omega\,({}^{i}\Psi_k - {}^{i}\Psi_i)}{b_{ki}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Man erhält dann für jede Höhlung die Gleichung:

$$\int_{(s_k)} \tau_{ko}\,ds = 2\,G\omega F_k$$

oder

$${}^{i}\Psi_k \int_{(s_{ko})} \frac{ds}{b_{ko}} + \Sigma\,({}^{i}\Psi_k - {}^{i}\Psi_i) \int_{(s_{ki})} \frac{ds}{b_{ki}} = 2\,F_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Aus diesen n in ${}^{i}\Psi$ linearen Gleichungen lassen sich deren Werte berechnen. Die mittlere Spannung in den Streifen gibt hierauf Gl. (4).

Zur Berechnung der Spannungsverteilung über die Streifendicke schlage ich folgenden Weg vor. Die Differentialgleichung der Schubspannungslinien lautet in Polarkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -2.$$

Läßt man den Pol mit dem Krümmungsmittelpunkt einer Spannungslinie zusammenfallen, so wird das zweite Glied gleich Null, r gleich dem Krümmungshalbmesser ϱ, $-G\omega\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ gleich der Schubspannung τ in Richtung der Spannungslinien und $-G\omega\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \frac{\partial \tau}{\partial n}$ gleich der Ableitung dieser Spannung senkrecht zur Spannungslinie. Die Gleichung wird:

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} + \frac{\tau}{\varrho} = 2\,G\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Bei Untersuchung der Spannungsverteilung in einem Normalschnitte eines Streifens sind bekannt die Krümmungshalbmesser der Begrenzungslinien, die Breite des Streifens $b = \int dn$ und die Schubkraft $\int_{(b)} \tau\,dn = \tau_{ki}\,b$. Sind die äußeren Begrenzungen des Streifens in der untersuchten Stelle gerade, so können sämtliche Spannungslinien als Gerade angenommen werden; man erhält:

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} = 2\,G\,\omega,$$

$$\tau = \tau_{ki} + 2\,G\omega n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Hier ist n entlang der Breitenlinie des Streifens von der Mitte ab gemessen. Die innere Spannung wird $\tau = \tau_{ki} - G\omega b$, die äußere $\tau = \tau_{ki} + G\omega b$. Man erhält eine Ueberlagerung der sich linear ändernden Schubspannung, die im geraden Streifen auftritt, mit der unveränderlichen Schubspannung τ_{ki}.

Für Streifen von unveränderlicher Breite fallen die Mittelpunkte des äußeren und inneren Krümmungshalbmessers zusammen; es wird $\varrho_a - \varrho_i = b$ und es kann $dn = d\varrho$ gesetzt werden. Die Lösung der Differentialgleichung (6) lautet dann:

$$\tau = G\omega\varrho + \frac{b\,[\tau_k - {}^{1}/_{2}\,G\omega\,(\varrho_a + \varrho_i)]}{\lg \varrho_a - \lg \varrho_i}\,\varrho^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Bei veränderlicher Breite fallen die Mittelpunkte der Krümmungshalbmesser nicht zusammen; man wird einen möglichst der Wirklichkeit entsprechenden Zusammenhang zwischen dn und $d\varrho$ aufstellen und die Lösung von Gl. (6) finden müssen.

Diese Gleichungen können auch zur Bestimmung der Randspannungen einfacher gekrümmter Streifen benutzt werden.

Das Moment des mehrfach zusammenhängenden Querschnitts wird

$$M \sim 2\,G\omega\left[\sum_{1}^{n} F_k\,{}^{i}\Psi_k + {}^{1}/_{3}\int_{(s)} b^3\,ds\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Das erste Glied entspricht dem Moment für den Fall, daß die Schubkräfte in den Mittellinien der Streifen vereinigt sind, das zweite Glied ist eine Ergänzung infolge der ungleichmäßigen Verteilung der Schubspannung über die Streifenbreiten. Für den einfachen Fall eines Kreisringes mit den Halbmessern r_a und r_i gibt Gl. (8) die Lösung

$$\tau = G\,\omega\,r.$$

Das Moment wird nach Gl. (9)

$$M = \frac{\pi}{2}\,G\,\omega\,(r_a^4 - r_i^4)\left[1 + {}^1/_6\,\frac{(r_a - r_i)^2}{(r_a^2 - r_i^2)}\right].$$

Die Formel für die Spannung entspricht der genauen Lösung; für das Moment ist der Fehler durch das zweite Glied der eckigen Klammer gegeben und beträgt für $r_a = 2\,r_i$ nur 3,3 vH.

Man wird mit Hilfe dieser Näherungsformeln mit Leichtigkeit fast alle Querschnitte der Praxis untersuchen können. 144

KURZE AUSZÜGE

Elastizität und Festigkeit.

Der Plattenbalken. Decken oder quer zu ihrer Ebene belastete Wandungen werden im Eisenbetonbau entweder durch Rippen versteift oder selbst als tragende Konstruktionen (als kontinuierliche Decken) armiert. Das Traggerüst der ersten Art von Konstruktion besteht aus den (meist rechtwinklig sich schneidenden) Systemen von Balken und Unterzügen, die mit der Decke eine zusammenhängende Masse bilden. Bei dieser, offenbar aus der Praxis der Holzbauweise übernommenen Konstruktion entsteht die Frage, welches Trägheitsmoment den Plattenbalken zuzuschreiben ist. Nach den im Eisenbetonbau geltenden Anschauungen wird ein Teil der anschließenden Decke auf der mitwirkenden Plattenbreite zu den Balken gerechnet und auf einer gewissen Breite zum Flansch des T-förmigen Profiles hinzugeschlagen. Dieser Anschauung liegt der Gedanke zugrunde, daß der Biegungssteifigkeit der Decke im großen und ganzen keine tragende oder nur eine sekundäre Wirkung im Tragen beizulegen ist. Die wahren Verhältnisse sind, wie man weiß, nicht von einfacher Art. Einzelheiten über das Verhalten der Plattenbalken haben Schüle, C. v. Bach u. a. durch zahlreiche Versuche näher erforscht. Die eigenartige Verkoppelung der Biegung eines Balkens mit der einer rechteckigen Platte erschwert das Problem. Dabei spielt die Rippenhöhe (im Verhältnis zur Plattenstärke) eine wesentliche Rolle. Das statische Verhalten des Plattenbalkens wird ein wesentlich verschiedenes sein, je nachdem die Höhe des Steges groß im Verhältnis zur Dicke der Platte oder von gleicher Größenordnung mit ihr ist.

R. Bortsch (Der Bauingenieur Bd. 2, S. 662—667, 1921) hat die Frage nach dem genaueren Spannungszustand eines Plattenbalkens aufgeworfen und zu beantworten versucht. Er sieht zunächst von der Biegungssteifigkeit der Platte ab und betrachtet einen Plattenbalken mit einer einzigen Rippe, an die sich eine unbegrenzte Decke anschließt. Aus diesem Gebilde schneidet er senkrecht zur Rippe einen Parallelstreifen heraus und untersucht dessen Spannungszustand, wenn 2 Kräftepaare ihn in der Ebene der Rippe zu verbiegen suchen. Anstatt aber, wie man erwarten würde, die Spannungen in der Übergangsfläche der Rippe und der Platte als unbekannte Funktionen des Abstandes in der Längsrichtung der Rippe einzuführen, nimmt er an, daß die Beanspruchung der Decke einfach vom Rande her durch zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete konzentrierte Kräfte erfolgt. Das Randwertproblem der anschließenden Platte dürfte unter den gemachten Voraussetzungen verwickelter liegen. Nimmt man die Richtung der Rippe als x Achse, die einer Seite des Streifens als y Achse ($x = a$ ist die zweite) an, so scheint mir in der Decke ein ebener Spannungszustand mit der Verschiebung $\eta = o$ auf $y = o$ vorzuliegen, der von einem System von Kräften herrührt, daß auf dieser Geraden derart anzubringen ist, daß die durch die entgegengesetzt gerichtete Verteilung von Kräften im anschließenden Balken hervorgerufenen Verschiebungen ξ in Richtung der Rippe punktweise mit den Verschiebungen der Platte übereinstimmen. Außerdem müssen die Seiten $x = o$ und $x = a$ in der Platte spannungsfrei bleiben und an den Balkenenden die beiden Momente angreifen. Bortsch bestimmt nur den Verlauf der Spannung σ_x, die von den zwei auf dem Rande der Decke angreifenden konzentrierten Kräften herrührt (eine Randwertaufgabe, die übrigens von A. Sommerfeld und von E. Melan in aller Strenge gelöst worden ist). Zu diesem Zweck geht er von der Lösung der Einzelkraft in der Halbebene aus und spiegelt diese etliche Male an den Kanten $x = o$ und $x = a$. Dadurch gelingt ihm die Befriedigung der Randbedingung für die Spannungskomponenten σ_x, in dem diese nach unbegrenzter Wiederholung des Vorganges schließlich auf den Rändern

verschwinden. Da der Verfasser die Schubspannungen τ seiner Lösung nicht verfolgt hat, scheint ihm jedoch entgangen zu sein, daß sich diese auf den Rändern nicht fortheben. Die parallelen Ränder der Platte werden, im Gegensatz zum Vorgehen der vorgenannten Autoren, nicht frei von Spannungen erhalten.

Bei der Ermittlung der Spannungen im Rippenbalken, der durch eine Einzelkraft verbogen wird, verdient eine als ein vorbereitendes Problem formulierte Aufgabe wegen ihres allgemeinen Interesses eine Erwähnung, die Bortsch näherungsweise löst. Es handelt sich um den ebenen Spannungszustand, den eine Einzelkraft in einer dünnen Scheibe erzeugt, wenn sie in einem gegebenen Abstand von der (einzigen) geradlinigen Begrenzung angreift und zu dieser senkrecht gerichtet ist. Nach einer einmaligen Spiegelung der Kraft an dieser Geraden können, wenn die ursprüngliche und die gespiegelte Kraft in einer unbegrenzten Platte angreifend gedacht werden, diesmal die Schubspannungen, die von der ersten herrühren, auf der Begrenzung zum Verschwinden gebracht werden. (Je nachdem die beiden Kräfte gleichsinnig oder gegenläufig gerichtet sind, heben sich entweder die Normalspannungen oder die Schubspannungen längs der Geraden auf, die zu der Verbindungsstrecke der beiden singulären Stellen in deren Mitte senkrecht steht.) Es verbleiben aber die Normalspannungen, und um diese ebenfalls fortzuschaffen, ist eine weitere Lösung erforderlich. Bortsch hat den ersten der beiden Schritte sich dadurch vereinfacht, daß er für die Spannungen, die von einer — in einem allseitig vom Material umschlossenen Angriffspunkt angreifenden — Einzelkraft herrühren, dieselben Formeln anwendet, die er zuvor für die in einem Randpunkt angreifende Kraft benutzte. Die Kombination von 2 Spannungszuständen von Michell von der erforderlichen Art

$$\sigma_x' = \frac{P}{\pi}\left[\frac{(3x^2 + y_2^2)\, y_2}{r_2^4} - \frac{(3x^2 + y_1^2)\, y_1}{r_1^4}\right]$$

$$\sigma_y' = \frac{P}{\pi}\left[\frac{(-x^2 + y_2^2)\, y_2}{r_2^4} - \frac{(-x^2 + y_1^2)\, y_1}{r_1^4}\right]$$

$$\tau' = \frac{P}{\pi}\left[\frac{(-x^2 + y_2^2)\, x}{r_2^4} - \frac{(-x^2 + y_1^2)\, x}{r_1^4}\right]$$

hätte ihm den ersten Teil des gewünschten Spannungszustandes streng liefern können. (Hier bedeuten x, y_1, $r_1^2 = x^2 + y_1^2$ die Koordinaten eines Punktes, gerechnet vom Angriffspunkt der Kraft P und x, y_2, $r_2^2 = x^2 + y_2^2$, die Koordinaten desselben Punktes, vom gespiegelten Angriffspunkt aus gerechnet.) Auf der Begrenzungsgeraden $-y_1 = y_2 = \eta$, wo $r_1 = r_2$, $\tau' = o$ sind, verbleiben die unerwünschten Spannungen

$$\sigma_y' = \frac{2P(-x^2 + \eta^2)\,\eta}{\pi\,(x^2 + \eta^2)^2}$$

die unter Anwendung eines weiteren ebenen Zustandes der Form

$$\sigma_x'' = \int_0^\infty A(\alpha)\,[-1 + \alpha(y_1 + \eta)]\, e^{-\alpha(y_1+\eta)} \cos\alpha x\, d\alpha$$

$$\sigma_y'' = -\int_0^\infty A(\alpha)\,[1 + \alpha(y_1 + \eta)]\, e^{-\alpha(y_1+\eta)} \cos\alpha x\, d\alpha$$

$$\tau'' = -\int_0^\infty A(\alpha)\,\alpha(y_1 + \eta)\, e^{-\alpha(y_1+\eta)} \sin\alpha x\, d\alpha$$

sich beseitigen lassen. Zur Bestimmung von $A(\alpha)$ steht die Bedingung zur Verfügung

$$y_1 + \eta = 0 \qquad \sigma_y'' = -\sigma_y',$$

aus welcher der Wert von

$$A(\alpha) = \frac{2P}{\pi}\,\alpha\,\eta\, e^{-\alpha\eta}$$

folgt.

Die Integrationen lassen sich nunmehr ausführen und liefern die zweite, von den Angaben von Bortsch abweichende Gruppe von Formeln,

$$\sigma_x'' = \frac{P}{\pi}(y_2 - y_1)\left[\frac{x^2 - y_2^2}{r_2^4} + \frac{(y_1 + y_2)(-3x^2 y_2 + y_2^3)}{r_2^6}\right]$$

$$\sigma_y'' = \frac{P}{\pi}(y_2 - y_1)\left[\frac{x^2 - y_2^2}{r_2^4} - \frac{(y_1 + y_2)(-3x^2 y_2 + y_2^3)}{r_2^6}\right]$$

$$\tau'' = \frac{P}{\pi}(y_2^2 - y_1^2)\,\frac{(-x^3 + 3x y_2^2)}{r_2^6}$$

durch welche im Verein mit der für die $\sigma'\,\tau'$ die Spannungen gegeben sind, die von einer in einem inneren Punkt der Halbebene angreifenden Einzelkraft herrühren, sofern die Kraft zu der Begrenzung senkrecht steht. (Der Abstand des Angriffspunktes von der Geraden ist $\eta = \frac{y_2 - y_1}{2}$.) Sie lassen erkennen, daß zur Befriedigung der Randbedingung auf einer freien Geraden außer dem Spannungszustand von Michell für die gegebene Kraft P, die in den beiden Formelgruppen enthaltene zweite zugeordnete Singularität (deren Ort der gespiegelte Angriffspunkt ist) hinzuzunehmen ist. Dieses Ergebnis dürfte vermutlich weiterer Verallgemeinerung in der Theorie der Spannungszustände von ebenen Scheiben und dünnen Platten fähig sein.

In der Arbeit von Bortsch werden weiter die Plattenbalken mit gleichförmig verteilter Belastung und mit mehreren Rippen näherungsweise behandelt.

In seinem **Beitrag zur strengen Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen** weist Lewe („Bauingenieur", S. 111 bis 112, 1922) darauf hin, daß man den ungünstigsten Lastfall nicht bei einer gleichförmigen Belastung erhält, sondern in der streifenweisen Belastung. Die Überlagerung der Spannungszustände eines gleichmäßig belasteten, frei aufliegenden Plattenstreifens und der unbegrenzten, in einem rechteckigen Gitter von Punkten aufruhenden und gleichförmig belasteten Platte ergibt eine kontinuierliche Decke, die abwechselnd auf einem Streifen von Feldern zwischen zwei benachbarten Säulenreihen belastet und auf dem nächstfolgenden Streifen unbelastet ist. Bei dieser einseitigen Kraftwirkung ist jedoch die Wirkung der Einspannmomente, die unter Vermittlung

der meist viereckig ausgeführten Säulenköpfe von den Säulen auf die Decke übertragen werden, nicht berücksichtigt. Um auch ihren Einfluß zu bestimmen, berechnet Lewe die verbogene Gestalt einer Decke, die in kleinen viereckigen Flächen Lasten trägt, deren Wirkung innerhalb jedes Rechtecks einem Moment äquivalent ist. Sie ergibt sich ihm in einer einfachen und in einer Doppelsumme. Es ist ein erfreuliches Zeichen für die Fruchtbarkeit der Ansätze der Plattenlehre, daß sie bereits das Zusammenwirken der Decken mit den Säulen in ihren Einzelheiten zu erfassen gestatten. Ob freilich die angenommene einfache Verteilung des Druckes zwischen Säulenkopf und Decke im Falle eines Momentes den tatsächlichen Verhältnissen entspricht, werden weitere Untersuchungen oder Versuche zeigen müssen. Vielleicht wird hier aber noch ein anderer Weg zum Ziele führen können. Man braucht bei allen derartigen Aufgaben die genauere Druckübertragung an der Angriffsstelle der Last vorerst nicht anzunehmen, wenn man, wie dies auch sonst in der Statik geschieht, nur den Spannungszustand untersucht, der von der konzentrierten Kraft, oder im vorliegenden Fall — von den regelmäßig angeordneten konzentrierten Momenten herrührt. Mit den Spannungszuständen, die von den Einzelkräften oder Momenten oder den regelmäßig angeordneten Singularitäten herstammen, sind nämlich die Funktionen bekannt, denen sich die Spannungen aller in der Umgebung der Singularität möglichen äquivalenten Verteilungen mit der Entfernung von der Angriffsstelle rasch anschließen müssen. Sodann kann unabhängig von den Bedingungen, die der Platte auf ihrem Rand vorgeschrieben sind, nach Annahme des ungefähren Verlaufes der zu erwartenden Druckverteilung die lokale Abweichung der Spannungen abgeschätzt werden.

Plattenbiegung. S. Timoschenko („Bauingenieur, S. 51—54, 1922) bringt einige bemerkenswerte Anwendungen der Ansätze von M. Lévy auf die Biegungsaufgaben der allseitig unterstützten rechteckigen Platte durch eine Einzelkraft. Er knüpft zunächst an die Lösung des unendlich langen Plattenstreifens an, der die Grenzbedingungen $w = o$, $\Delta w = o$ erfüllt und behandelt im Anschluß an sie den Fall, daß die Last in einem Punkte der Symmetrieachse des Rechtecks angreift. Wenn sie im Mittelpunkt wirkt, vereinfachen sich die Formeln weiter und gestatten eine bequeme Angabe über die größte Biegungsbeanspruchung zu machen. Der Ansatz führt auch zum Ziele, wenn zwei gegenüberliegende Seiten des Rechtecks eingespannt sind. Hier werden die Durchbiegungen aus zwei Teilen zusammengesetzt, nämlich aus der Lösung, welche die Grenzbedingungen $w = o$ $\Delta w = o$ ringsum erfüllt und aus einer zweiten, die an dem einen Seitenpaar Momente besitzt. Die Zusatzlösung konvergiert aus leicht ersichtlichen Gründen sehr gut. Die Bemerkungen dürften die Möglichkeit zur Angabe weiterer Lösungen im Rechteck bieten.

Knickungserscheinungen. Eine zusammenfassende Bearbeitung der Knickungserscheinungen elastischer Systeme hat H. M. Westergaard in einem Bericht (Proceedings of the American society of civil Engineers, Vol 47 S. 455—533) der Gesellschaft amerikanischer Bauingenieure vorgelegt.

Er erörtert zunächst die Knickung gerader Stäbe unter der Wirkung gemischter, achsialer und seitwärts gerichteter Kräfte. Die Momentenkurven werden, soweit sie sich nicht unmittelbar anschreiben lassen, auf Grund von Entwicklung der Momentenlinien in Fouriersche Reihen erhalten. Im Anschluß an die Arbeiten von Bryan, Timoschenko und Reißner bespricht Westergaard die Knickung elastischer Platten am Beispiel der in ihrer Ebene nach zwei zu einander senkrechten Richtungen mit verschiedenen Spannungen gedrückten rechteckigen Platte. Er gibt für die Momente einer sowohl durch seitliche, als auch in ihrer Ebene wirkenden Kräfte, belasteten rechteckigen Platte Näherungsformeln an. Zu einem bemerkenswerten Falle der Knickung führt die Belastung eines Gitters von zwei senkrecht sich kreuzenden Scharen von Stäben in seiner Ebene. Da das Gitter zu einer Regelfläche deformiert werden kann, ohne daß in irgend einem der Stäbe Spannungen entstehen, besitzt es keine Steifigkeit gegenüber Schubwirkungen; es knickt, wenn die Enden der Stäbe gewisse Grenzbedingungen erfüllen, wie ein zweidimensionales System mit Biegungssteifigkeit, jedoch ohne Schubspannungen. Westergaard denkt dabei an eine Knickung einer Betonplatte mit den in ihrem Innern enthaltenen Eiseneinlagen. Die Knickung der unbewehrten, homogenen Platte bildet den einen, die des frei beweglichen Stabgitters den andern Grenzfall, der für die Verhältnisse der Verbundplatte in Betracht gezogen werden kann.

Der speziellen Erörterung schließt sich eine allgemeine,auf dem Prinzip der virtuellen Verrückungen elastisch deformabler Körper fußende an, in der die Entwicklung nach Orthogonalfunktionen hervortritt. Erwähnt sei ferner seine Unterscheidung einer astatischen Biegung (indifferentes Gleichgewicht, wenn das System unter seiner Knicklast steht) von einer orthostatischen Biegung (gewöhnliches, stabiles Gleichgewicht, Linearität zwischen den Durchbiegungen und den Kräften) und einer heterostatischen Biegung (gemischte Belastung). Bei dieser Untersuchung könnte es gelegentlich vorkommen, daß ein Biegungszustand der einen Art stetig in einen der anderen Art übergeht. Den Schluß der Schrift bilden einige Lösungen zur Plattenbiegung und zur Biegung eines Gitters von Stäben mit rechteckigen Maschen durch transversale Kräfte.

In seinem **Beitrag zur Härteprüfung** beschäftigt sich F. Waizenegger (Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 283, 1922, 32 S.) mit der Brinellschen Kugeldruckprobe. Seine Arbeit fußt zu einem guten Teil auf den Untersuchungen von Eugen Meyer und E. Kürth über Härteprüfung

und Härte, vor allem auf dem von E. Meyer angegebenen, für alle Stoffe gültigen Potenzgesetz nach dem die Belastung P, unter der eine Stahlkugel in einen plastisch deformablen Körper eindringt, proportional einer Potenz des Eindruckdurchmessers d

$$P = a d^n$$

ist, wobei die Zahl n zwischen 2,0 und 2,5 liegt und von der Vorbehandlung des Materials abhängt. Die Härtezahl H definiert Meyer durch Division des Druckes P durch die Fläche des Eindruckkreises, während sie Brinell bekanntlich auf die Fläche des Kugelabschnittes bezieht. Waizenegger verfolgt den Verlauf der Härtezahl nach dem Potenzgesetz mit der Kugelbelastung, sie bildet, in Abhängigkeit von dieser letzteren aufgetragen, eine der Spannungsdehnungslinie der bildsamen Stoffe ähnliche Kurve, die zuerst ansteigt, ein Maximum erreicht und dann abfällt. Statt der Spannung aus dem von Brinell festgelegten Kugeldruck von 3000 kg (bezw. 500 kg für weiche Stoffe), schlägt Waizenegger, einer Anregung von R. Baumann folgend, die Größthärtezahl in seinem Diagramm als Maß der Härte vor. Er berechnet diesen größten Wert mit Hilfe des Meyerschen Potenzgesetzes und findet, daß er von den beiden Stoffkonstanten a und n in verhältnismäßig einfacher Art abhängt. Um ihn aus einem Kugeldruckversuch zu berechnen, wird man erst diese Festwerte zu bestimmen haben. Er zeigt dafür zwei Wege, deren einer in dem bereits von Meyer vorgeschlagenen Auftragen der Beobachtungen auf Logarithmenpapier besteht, und deren zweiter Parameterdarstellungen von Kurvenscharen benutzt. Schließlich überträgt er die Untersuchungen von Kürth und Meyer über die Beziehungen der Streckgrenze und der Zugfestigkeit zur Härte auf die Größthärtezahl.

Stoßartige Beanspruchung. Von den Konstruktionsteilen des Motoren- und Automobilbaues wird gegenüber rasch veränderlichen Belastungen und Stößen eine ausreichende Widerstandkraft verlangt. Ihre Festigkeitseigenschaften hat W. Müller, Darmstadt, (Heft 217 der Mitt. über Forschungsarbeiten des V. d. I., 38 S., 1922) an der für die Anwendungen wichtigsten Gruppe von Materialien, die stoßartigen Beanspruchungen zu widerstehen vermögen, nämlich an den legierten Sonderstählen (Mangan-, Chrom-, Nickel- und Nickel-Chromstählen) untersucht. Er prüft ihre Schlagbiegefestigkeit und Schlaghärte, doch erstreckt sich seine Untersuchung auch auf ihre anderen Festigkeitseigenschaften. Die Schlagbiegefestigkeit wird an einem Kruppschen Dauerschlagwerk ermittelt, das die Schläge zählt, die ein durch diese auf Biegung beanspruchter Rundstab bis zu seinem Bruche aushält. Die Probestäbe hatten einen Durchmesser von 15 mm, erhielten in ihrer Mitte eine Rundkerbe von 1 mm Tiefe und 0,8 mm Halbmesser und ruhten mit 100 mm Stützweite auf. Auf den Stab fiel ein Gewicht von 4 kg aus 3 cm Höhe 86 mal in der Minute herab, nach jedem Schlag wurde der Stab um seine Achse um 180° gedreht. Außer der Schlagzahl, die den Bruch herbeiführt, ermittelte Müller die Zahl der Schläge, bei der die ersten Risse im Kerbgrund sich zeigten. Diese wurden durch eine Lupe aufgesucht.

Die Schlaghärte bestimmte er in einem Schlaghärteprüfer von Wilk. Dieser Apparat treibt eine kleine Stahlkugel (von 2,4 mm Durchmesser) durch einen Schlag nach plötzlicher Entspannung einer Feder in das zu untersuchende Stück. Gemessen wird nach Wilk die Tiefe des Eindruckes, nach Müller sein Durchmesser. Unter Schlaghärte versteht Wilk das Verhältnis der Schlagarbeit zum verdrängten Volum der Eindruckkalotte. Müller zieht es vor, diese Arbeit auf die Oberfläche der Kalotte zu beziehen. Er vergleicht diese Schlaghärte an den gleichen Probestücken mit ihrer Brinellschen Härte bei einer langsam veränderlichen (ruhenden) Belastung, die solange gesteigert wird, bis mit einer Stahlkugel von gleichem Durchmesser dieselbe Eindrucktiefe wie im Schlagversuch erreicht wird. Er berechnet das Verhältnis der Schlaghärte zur statischen Last und findet für die untersuchten Stahlsorten annähernd einen unveränderlichen Wert. Ob die geometrische Aehnlichkeit (im vorliegenden Falle Kongruenz) zweier Eindrücke, die durch einen Schlag, beziehungsweise durch ein langsames Eindringen einer Kugel entstanden sind, auch eine mechanische Aehnlichkeit des Fließvorganges um die Eindruckstelle im Material bedingt und wie der Zusammenhang der Eindruckkraft mit dem Eindruckweg von der Geschwindigkeit des Stoßes oder Versuches beeinflußt wird, hat der Verfasser nicht verfolgt. Einen großen Teil der Arbeit bildet eine vergleichende Darstellung von Verhältniszahlen aus den charakteristischen Größen des Zugversuches, als der Proportionalitäts-, der Streck- und der Bruchgrenze mit den Schlagbiegezahlen und der Schlag- und Brinellschen Härte, deren engere oder weitere Anwendungsmöglichkeit vom geringeren oder größeren Grad der Vollkommenheit abhängen wird, mit der diese Begriffe definiert sind. Den Dauerschlagversuchen legt der Verfasser den Wert einer technologischen Probe bei. Von der Schlaghärteprüfung erhofft er dagegen ein weiterer Verbreitung fähiges Verfahren.

Kohäsion, Härte, Zähigkeit. Eine treffliche Uebersicht über die drei Grundeigenschaften der Werkstoffe Kohäsion, Härte und Zähigkeit gewinnt man aus der technologischen Studie von P. Ludwik (Zeitschr. f. Metallkunde, 14. Jahrg., S. 101—110, 1922). Die Kohäsion ist der spezifischen Zugspannung gleich aufzunehmen, die die Trennung benachbarter Teile senkrecht zur Zugrichtung herbeiführt. Die Trennung durch Schubspannungen nimmt er vom Kohäsionsbegriff aus, was sich im wesentlichen mit der Unterscheidung des Trennungsbruches vom Verschiebungsbruch von Prandtl (Dresdener Naturforschervortrag) deckt. Die Bestimmung der

wahren Zerreißspannung aus einem Zugversuch bietet bei den dehnbaren Stoffen, wie den Metallen wegen der dem Bruch vorangehenden Einschnürung beträchtliche Schwierigkeiten, weil die Spannungsverteilung im Augenblick des Bruches weit entfernt von einer gleichförmigen ist. Er verweist auf die Mängel des Begriffes der auf den ursprünglichen Querschnitt bezogenen »Zugfestigkeit«, der bei näherem Zusehen keine bestimmte charakteristische Eigenschaft des Stoffes entspricht. Ueber die Härte sagt Ludwik, daß sie im Gegensatze zur Kohäsion leichter zu messen, als zu erklären sei. Mit der üblichen Definition der Härte als des Widerstandes, den ein Körper dem Eindringen eines andern entgegensetzt, wird man sich erst befriedigt erklären können, wenn es gelungen sein wird, diesen Widerstand auf den Spannungszustand im plastisch deformierten Teil und auf die bestimmenden Materialeigenschaften zurückzuführen. Die Mängel der in der Praxis eingebürgerten Härteprüfverfahren haben die Forschung angeregt, ihren Ursachen nachzugehen. Ludwik betont zwei derselben; eine der Hauptursachen für die verschiedenen Härtezahlen, die man an einem und demselben Stoff erzielt, ist die, daß das Metall je nach dem Grad seiner bereits vollzogenen plastischen Verformung verschieden bildsam geworden ist. Metalle, die sich stark verfestigen, wie beispielsweise Kupfer, widerstehen nach stärkerer Formänderung mit einem größeren Widerstand, erscheinen also härter als sie waren. Dieser Vorgang vollzieht sich aber während des Eindruckversuches selbst und läßt das Metall um so härter erscheinen, je stärker es deformiert wurde. Eine weitere Komplikation kommt wegen der geometrisch unähnlichen Eindrücke mit steigender Belastung hinzu. Diese läßt sich vermeiden, wenn man statt der Kugel einen Kegel aus hartem Material in das zu untersuchende eintreibt. Nach den Feststellungen von Ludwik bleibt das Verhältnis der Kraft durch die Eindruckfläche bei der Kegelprobe bei allen Belastungen dasselbe. Unter der Kegeldruckhärte versteht er das Verhältnis der Kraft zur Fläche des Eindruckkreises, wobei es gleichgültig ist, wie tief der Kegel in den Stoff eingetrieben wird. Bei den einschnürenden Stoffen besteht eine einfache Beziehung zwischen der Kugeldruckhärte von Brinell und der Zugfestigkeit, bei nicht einschnürenden nicht.

Um für die dritte Grundeigenschaft, die Zähigkeit, vergleichende Maßzahlen zu schaffen, bemühen sich die Technologen seit langem. Die Aufzählung der Reihe von Proben, die sie zu ihrer Bestimmung ersonnen haben, können wir hier übergehen, weil sich an ihnen kaum ein einwandfreier Maßstab ausbilden ließ. Der Grund liegt einerseits in der Mehrdeutigkeit, in der das Wort Zähigkeit in den Anwendungen benutzt wird, andererseits in den ziemlich verwickelten Vorgängen, die den Zähigkeitsproben zugrunde liegen. Ludwik nimmt lediglich die bis zur Zerstörung erreichbare Formänderung ohne Rücksicht auf die sie erzeugenden Kräfte oder Spannungen als die zu vergleichende Größe an. Er bemerkt aber, daß naturgemäß noch andere Einflüsse, um nur einen zu nennen, die Geschwindigkeit der Formänderung, zu berücksichtigen sein werden. Zur Kennzeichnung dieser Stoffeigenschaft schlägt er das Wort »Schmeidigkeit«, zu ihrer näherungsweisen Abschätzung eine sehr einfache neue Probe vor. Diese besteht darin, daß ein gehärteter Stahlkegel (Körner) nahe zum Rande einer rechtwinkeligen Körperecke so tief in den Stoff eingedrückt wird, bis ein Riß entsteht. Dabei bewegt sich die Körnerspitze seitwärts und der Rand weicht um einen kleinen Betrag aus. Das Maß der Schmeidigkeit entnimmt er irgend einem Verhältnis zweier charakteristischer Längen des entstandenen Wulstes, beispielsweise dem Verhältnis der größten Ausbauchung zur Entfernung der Körnerspitze von ihrem Rand, wobei diese Zahl von der Entfernung, in der die Spitze von der Körperkante angesetzt wurde, wegen der geometrisch ähnlichen Fließvorgänge unabhängig ist.

A. Nádai. 185

KLEINE MITTEILUNGEN

Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin. [1])

1. Die Bewegung des Dollarkurses seit 1918. Wer die fortlaufenden Nachrichten über den Stand des deutschen Geldwertes — etwa in Form des täglichen amtlichen Dollarpreises an der Berliner Börse — aufmerksam verfolgt, wird zunächst den Eindruck einer verwirrenden Mannigfaltigkeit regellos aufeinander folgender Zahlen gewinnen. Bei näherem Zusehen wird sich aber jedem die Erkenntnis erschließen, daß das dauernde Hin- und Herschwanken von einer einsinnigen Bewegung begleitet wird, die das Niveau der Schwankungen höher und höher hebt. Im Folgenden ist der Versuch gemacht, durch eine sachgemäße mathematische Analyse der Preiskurve des Dollars von November 1918 bis Juli 1922 die Trennung zwischen Grundbewegung und darüber gelagerten Schwankungen möglichst objektiv durchzuführen und die beiden Bestandteile der Bewegung ihrem Wesen nach zu kennzeichnen. Hierzu ist eine

[1]) Unter dieser Sammelüberschrift sollen von Zeit zu Zeit Mitteilungen über die Ergebnisse gelegentlicher, kleinerer Arbeiten, die innerhalb des Instituts ausgeführt werden und allgemeineres Interesse in Anspruch nehmen dürfen, zur Veröffentlichung gelangen.

Reihe von zum Teil grundsätzlichen Ueberlegungen nötig.

1. Die logarithmische Auftragung.

Will man den zeitlichen Verlauf eines Wechselkurses klar erfassen, so muß man als Funktion der Zeit nicht den ursprünglichen Kurs selbst, sondern seinen Logarithmus ansehen. Denn die Kurszahlen haben nicht als absolute Werte, sondern nur als Verhältniszahlen Bedeutung. Wenn man etwa in einer Kurve die Dollarpreise jeder Woche nebeneinander auftragen wollte, z. B. nacheinander die Zahlen 249, 310, 278, so würden die Höhenunterschiede der drei Punkte, nämlich $+61$ und -42, die Preisdifferenzen für einen Dollar darstellen, während die Geldwertschwankungen durch die beiden Verhältnisse 310:249 und 278:310 bestimmt werden. Die Schwankungen waren drei Jahre früher ebenso groß, wenn die betreffenden Zahlen für den Dollarpreis etwa 24,9, 31,0, 27,8 betrugen; diese aber würden bei der gewöhnlichen Darstellung 10mal kleinere Differenzen, nämlich $+6{,}1$ und $-4{,}2$ aufweisen. Ueberhaupt ließe sich ein natürlicher Maßstab gar nicht finden, der den ganzen Verlauf der Kursbewegung in der betrachteten Zeit, von etwa 10 ℳ für den Dollar Ende 1918 bis etwa 1000 ℳ in unseren Tagen, zur Anschauung bringen könnte, ohne daß dabei die Schwankungen der Anfangszeit völlig verwischt würden. Umgekehrt, wenn wir nicht den Dollarpreis in Mark, sondern den Markpreis in Dollar aufzeichneten, was offenbar genau ebenso berechtigt ist, so würden wir ein Bild erhalten, das den Anschein erweckt, als gäbe es heute so gut wie gar keine Schwankungen, da der Markpreis eine ganz kleine, kaum noch veränderliche Zahl sei.

Von allen diesen Schwierigkeiten und Nachteilen befreit man sich, wenn man die Logarithmen des Wechselkurses zu den (in natürlichem Maßstabe aufgetragenen) Zeiten aufträgt. Jetzt ist die Linie für den Dollarpreis in Mark identisch mit der für den Markpreis in Dollar, es kommt nur darauf an, ob man die Ordinaten von unten nach oben oder von oben nach unten mißt. Gleich große prozentuelle Schwankungen erscheinen im Bilde gleich ausgeprägt, gleichgültig zu welcher Zeit und auf welchem Kursniveau sie stattgefunden haben. Auf eine besondere Bedeutung dieses Umstandes wird noch später, Punkt 3, hingewiesen werden.

Unsere Abb. 1 zeigt zwei übereinander gezeichnete logarithmische Kurslinien, die für die 190 Wochen vom 18. November 1918 bis zum 8. Juli 1922 je das Maximum bezw. Minimum des Dollarpreises in Berlin darstellen[1]). Das Original der Abbildung ist auf Liniennetzpapier Nr. 373½ von Schleicher & Schüll in Düren gezeichnet worden. Die Kurswerte sind für die Zeit von Anfang 1920 bis zum Ende, den amtlichen Aufzeichnungen des Warenkurses für den Dollar an der Berliner Börse entnommen. Für die Zeit vom November 1918 bis Ende 1919 sind die Berliner amtlichen Kurse für den Schweizer Franken verwandt und mit dem amtlichen Dollarkurs an der Züricher Börse umgerechnet worden. Diese Umrechnung erfolgte in einfachster Weise mit Hilfe der Rechenwalze »Loga-Kalkulator«, die ein für derartige Berechnungen sehr zweckmäßiges Gerät darstellt, da sie mit der Einfachheit des gewöhnlichen Rechenschiebers eine Genauigkeit von 5 Stellen verbindet. Aus den Aufzeichnungen der sämtlichen in einen Wochenabschnitt von Montag bis Sonnabend fallenden Kurse wurden dann je der größte und der kleinste Wert ausgewählt und jeder von diesen in das Kurvenblatt eingetragen[1]).

Schon ein flüchtiger Blick auf die beiden nahe benachbarten Linien läßt erkennen, daß es sich hier um eine von Anfang bis zum Ende fast geradlinig fortschreitende Grundbewegung handelt, die von wenigen großen und vielen kleinen Schwankungen überlagert wird.

2. Die lineare und parabolische Ausgleichung.

Es liegt nahe, nach dem in der Ausgleichsrechnung üblichen Verfahren die sogenannte plausibelste Gerade zu suchen, die sich im Sinne der Voraussetzungen der Ausgleichsrechnung den Beobachtungslinien am besten anschmiegt. Zu diesem Zwecke wurden zunächst die beiden in Abb. 1 gezeichneten Linien für die Rechnung durch eine einzige ersetzt, indem das arithmetische Mittel aus dem Kleinst- und Höchstwerte jeder Woche gebildet und zu diesem der Logarithmus aufgesucht wurde. Mit diesen 190 Zahlen der fünfstelligen Logarithmen der mittleren Kurse hat Herr Jenne auf einer elektrischen Additions-Rechenmaschine die Ausgleichsrechnung durchgeführt. Das Ergebnis der Rechnung kommt in der Geraden zum Ausdruck, die in Abb. 1 eingezeichnet ist. Ihr Anfangswert entspricht einem Dollarpreis von 10,14 ℳ, ihr Endwert einem solchen von 298,95 ℳ. Die Neigung der Geraden wird gemessen durch einen Anstieg von $0{,}00773 = \log 1{,}018$ pro Woche. Dies besagt also, daß der deutsche Geldwert sich in den vier Jahren durchschnittlich um 18 vT pro Woche verschlechtert hat oder (da $39 \cdot 0{,}00773 \sim 0{,}303 = \log 2$) in je ¾ Jahren auf die Hälfte gesunken ist. Nach der in der Theorie des radioaktiven Zerfalls üblichen Ausdrucksweise ist also neun Monate die »Halbwertzeit« des deutschen Geldes. Aus $52 \cdot 0{,}00773 = 0{,}4020 = \log 2{,}52$ gewinnt man die mehr geschäftsmäßige Fassung des Ergebnisses: Wer sein Geld in Dollar anlegt, hat, in Mark gerechnet, eine

[1]) Die Werte für die drei Wochen vom 10. bis zum 29. Juli sind in dieser, wie in Abb. 3 ebenfalls eingetragen, aber bei den Rechnungen nicht berücksichtigt.

[1]) Für die Woche vom 15. bis zum 20. März 1920, für die eine amtliche Notierung nicht vorliegt, ist das arithmetische Mittel der Nachbarwochen angenommen worden.

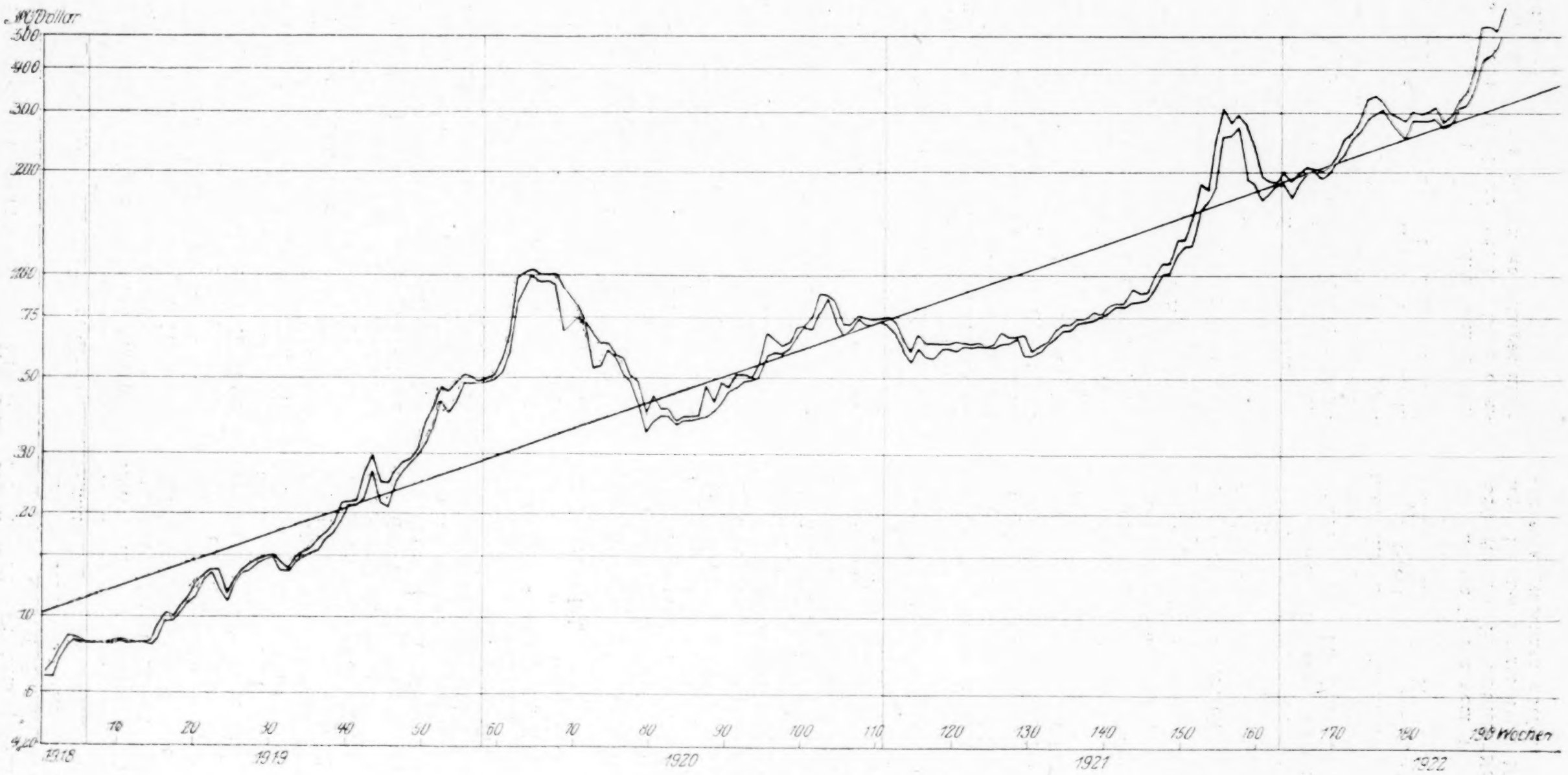


Abb. 1

Logarithmische Darstellung des Dollarpreises in Mark vom 18. November 1918 bis 29. Juli 1922.
Größt- und Kleinstwerte jeder Woche und Ausgleichsgerade.

jährliche Verzinsung mit 152 vH. Natürlich gilt diese Aussage nur, wenn man über alle Schwankungen hinwegsieht.

Zwischen den eingezeichneten Beobachtungslinien und der die Ausgleichung darstellenden plausibelsten Geraden erkennt man weitgehende Abweichungen. Insbesondere ist es auffallend, daß der tatsächliche Anfangswert weit unterhalb, der tatsächliche Endwert weit oberhalb der Geraden zu finden ist. Es war von vornherein von besonderem Interesse, zu fragen, zu welchem Ergebnis eine höhere Ausgleichung führen würde. Wenn man nämlich statt der plausibelsten Geraden die plausibelste Parabel zweiten Grades aufsucht, so muß man statt einer konstanten Steigung eine mit der Zeit veränderliche erhalten; aus den Vorzeichen der Veränderung muß sich ein Schluß darüber ergeben, ob die Verschlechterung unseres Geldwertes mit der Zeit zunimmt oder abnimmt, d. h. schneller wird oder langsamer. Herr Jenne hat auch diese weitere Rechnung durchgeführt, wobei sich ergeben hat, daß der oben genannte durchschnittliche Koeffizient die Verschlechterung, nämlich die Zahl 0,00773, eine ganz geringfügige Vergrößerung aufweist, u. zw. um 0,0000033 pro Woche. Wenn man die dieser parabolischen Ausgleichung entsprechende plausibelste Parabel konstruiert, so zeigt sich, daß sie von der in Abb. 1 eingetragenen plausibelsten Geraden nur ganz unmerklich abweicht. Der Unterschied würde nur wenige Millimeter Senkung der Linie in der Mitte und Hebung an den Enden bedeuten. Man muß daraus schließen, daß die Verminderung des Geldwertes einen im Durchschnitt des betrachteten Zeitraumes ziemlich stabilen Charakter besitzt.

Eine Ausgleichung dritter Ordnung würde, wie man leicht sieht, das letzte Resultat, nämlich das durchschnittliche Konstantbleiben der Geldentwertung, in ganz bestimmter Weise modifizieren. Man erkennt aus dem Verlauf der Linie, daß in der ersten Hälfte des Beobachtungs-Zeitraumes vom Beginn bis zur Mitte die Verschlechterung des Geldwertes sich verlangsamt hat, während sie sich von der Mitte bis zum Schluß in den letzten beiden Jahren in gleichem Maße beschleunigt. Dadurch erklärt sich, daß die Aenderung des Verschlechterungs-Exponenten im Durchschnitt null ist. Eine zahlenmäßige Berechnung des entscheidenden Koeffizienten in der Ausgleichung dritter Ordnung ist nicht vorgenommen worden, da vielleicht das vorliegende Beobachtungsmaterial zu so genauer Analyse nicht berechtigt, und insbesondere im Hinblick auf die sehr ungünstigen Aussichten, die das Ergebnis eines solchen Rechnungsverfahrens zweifellos eröffnen würde.

3. Die Schwankungen.

Die Trennung der Kursveränderung in Grundbewegung und darüber gelagerte Schwankungen hat nur den Sinn, daß man in der ersteren die Wirkung des dauernden wirtschaftlichen und politischen Zustandes, in dem wir uns befinden, erblickt, während man die Schwankungen vorübergehenden Einflüssen zuschreibt. Diese können entweder wirkliche Störungen des Wirtschaftszustandes sein oder nur vermeintliche, d. h. also auf mehr oder minder unberechtigte Aenderungen in der Beurteilung der Lage zurückzuführen sein; darin kommt auch die Wirkung einer gewissen »Trägheit« zum Ausdruck, die eine einmal eingetretene Bewegung nicht so schnell zum Aufhören bringt, wie ihre Ursachen zu Ende gehen.

Bei der Beurteilung der Schwankungen muß man selbstverständlich die großen und langsamen, sozusagen säkularen Störungen, von den kleinen und schnellen Schwingungen unterscheiden. Unsere Abb. 1 läßt erkennen, daß, wenn nur die großen Abweichungen betrachtet werden, der ganze Beobachtungszeitraum in fünf ungefähr gleich große Abschnitte von etwa je neun Monaten Dauer zerfällt. Im ersten Abschnitt setzt der Dollarpreis mit etwa 7 ℳ weit unter dem Niveau der Ausgleichslinie, das 10 ℳ beträgt, ein und nähert sich ihm in langsamer Steigung bis August 1919. Von hier an fährt die Steigerung erheblich rascher fort, nachdem der Dollarpreis die Ausgleichslinie bei etwa 22 ℳ überschritten hat, erreicht im Februar 1920 einen Höchstwert von 100 ℳ und fällt von hier ziemlich steil zur Ausgleichslinie ab, die bei 40 ℳ am Ende der zweiten Periode im Mai 1920 wieder erreicht wird. Der Abfall von Februar bis Mai 1920 ist die einzige stark ausgeprägte Geldwertverbesserung im ganzen Zeitraum. Wenn später, in der vierten Periode, die Kurslinie wieder unter die Ausgleichsgerade sinkt, so wird das nicht mehr durch eine tatsächliche Verbesserung, sondern durch ein zeitweises Konstantbleiben des Kurses bewirkt. Vorher, in der dritten Periode von Mai 1920 bis Januar 1921, verläuft die Kurslinie dauernd fast in Uebereinstimmung mit der Ausgleichslinie. Es folgt der vierte Zeitraum von Januar bis September 1921, in dem die Kurslinie einen regelmäßigen Bogen unterhalb der Ausgleichslinie vollführt, anfangs fast wagerecht bleibend, dann ansteigend bis zum Schnitt mit der Ausgleichslinie bei etwa 150 ℳ. In dem letzten, seit Herbst 1921 bestehenden Zeitraum verläuft die Linie dauernd oberhalb der Ausgleichsgeraden, wobei sie schon zweimal kleinere Schwingungen vollführt hat und sich jetzt offenbar zum dritten Mal einem temporären, besonders großen Höchstwert nähert. Es ist jedoch zu beachten, daß die Erhebungen über die Ausgleichslinie, selbst für einen Dollarpreis von über 700 ℳ am Ende des Beobachtungszeitraumes noch erheblich geringer sind, als die im Februar 1920, wo einem rechnungsmäßigen Wert von 35 ein tatsächlicher bis etwa 100 gegenüberstand. Erst ein Wochendurchschnitt von etwa 1000 ℳ entspricht dem Schwankungsverhältnis vom Februar 1920; der in der letzten Augustwoche[1]) erreichte von etwa 1500 übersteigt ihn in viel gerin-

[1]) Zusatz bei der Korrektur.

gerem Maße, als es der naiven Auffassung erscheint: Die Fortsetzung der Linie in unserer Abb. 1 erhebt sich bis Ende August um 28,5 mm über die Gerade, während sie im Februar 1920 schon 23 mm Ueberschuß aufwies.

Neben den großen säkularen Schwankungen, die, wie wir sehen, nur etwa fünfmal ihr Vorzeichen wechseln, sind die außerordentlich zahlreichen, bei weitem regelmäßigeren kleinen Schwingungen in unserem Bilde zu erkennen. Ein näheres Eingehen auf diese Schwingungen hätte wenig Bedeutung, da man bedenken muß, daß in ihnen ja nur ein willkürlich herausgegriffener Teil der gesamten Schwankungen zum Ausdruck kommt. Würden wir nämlich statt der Wochendurchschnitte die täglichen Kurse aufgezeichnet haben, so würde jedes in unserer Darstellung noch monotone Linienstück selbst wieder eine Reihe von Schwingungen aufweisen. Ebenso gut könnte man auch, darüber hinausgehend, die wechselnden Kursnotierungen innerhalb eines Tages berücksichtigen und bekäme nochmals überlagerte Schwankungen. So weist in der Tat die Bewegung des Geldwertes einen ähnlichen Charakter auf, wie die dem Physiker geläufige Brownsche Bewegung, bei der man unter steter Verschärfung der Beobachtungsmittel eine stete Vermehrung und Verdichtung der Zickzackwege feststellt.

Wie auf der einen Seite die Grundbewegung allein interessant ist für denjenigen, der den Verlauf der wirtschaftlichen Verhältnisse des Landes kennen lernen will, so interessiert sich auf der andern Seite der Börsen-Praktiker nur für die wechselnden, vor allem für die kleineren Schwankungen. Denn die Kenntnis der Grundbewegung dient jedenfalls nicht dem Valutagewinn, höchstens der Möglichkeit einer Erhaltung des Geldwertes. Aller Gewinn durch Valutaveränderungen beruht auf den Schwankungen, deren vorherige Kenntnis allerdings bedeutende Gewinnmöglichkeiten eröffnen würde. Wenn dies auch nur von sehr »theoretischem« Wert sein mag, so soll hier die Bemerkung nicht unterdrückt werden, in welcher Weise sich der größtmögliche Valutagewinn aus der Kenntnis der logarithmischen Kurslinie berechnen läßt. Nimmt man an, daß jemand in den letzten vier Jahren nur je einmal in der Woche in der Lage war, sein Geld zu wechseln und zwar jeweils zu dem von uns berechneten Durchschnittskurs, so konnte er, bei bester Ausnutzung jeder Schwankung, in Mark soviel gewinnen, als die Summe der einzelnen positiven Anstiege der Kurslinie ausmacht. In Dollar gerechnet, würde der Gewinn gleich sein der Summe der absteigenden Linienteile, und diese Summe ist gleich der früheren, vermindert um die Differenz zwischen Endwert und Anfangswert, wie es ja natürlich sein muß. Der Mathematiker wird hier eine anschauliche Darstellung des Begriffes »totale Variation« einer Kurve finden. Es liegt nur an der logarithmischen Auf-

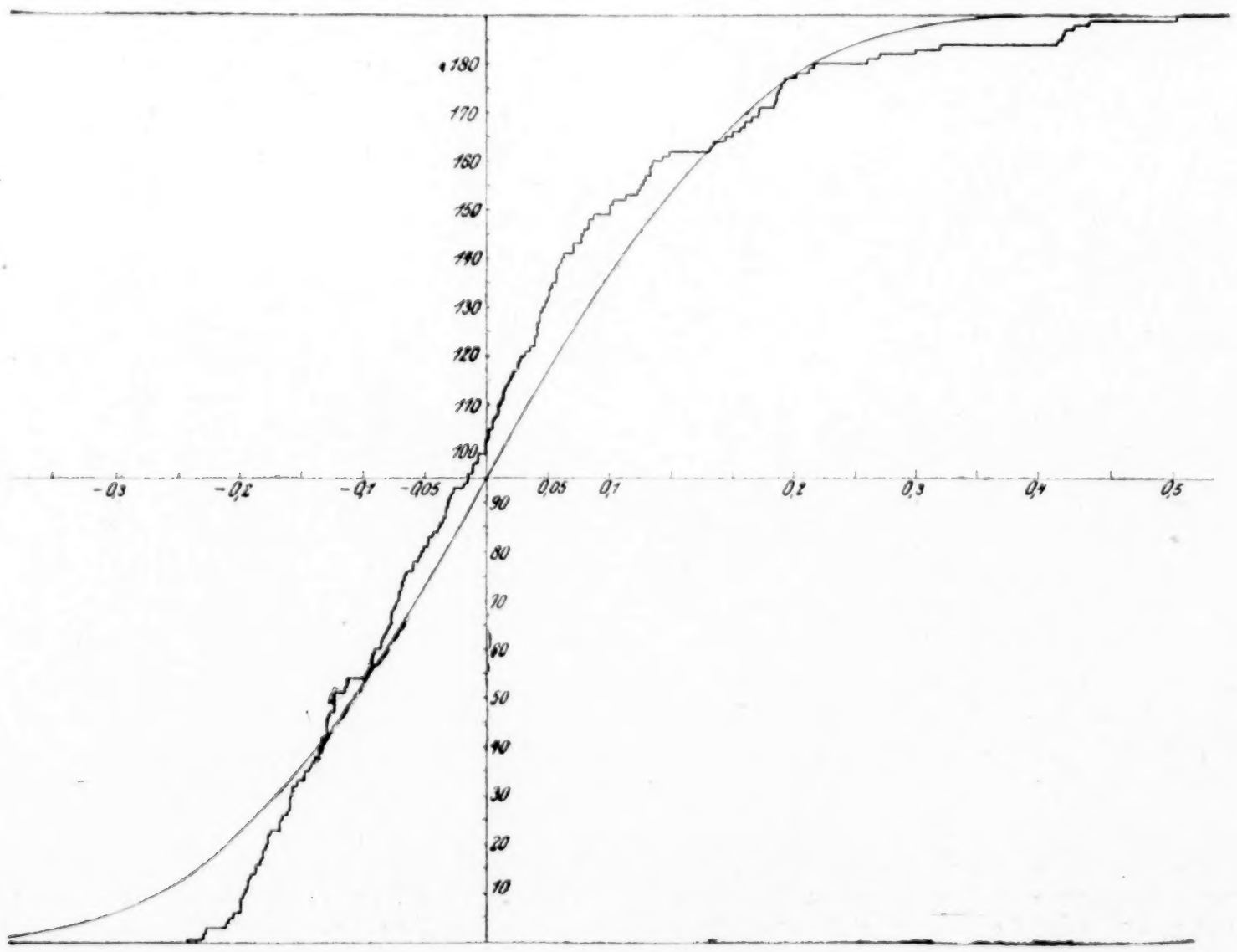


Abb. 2
Häufigkeitskurve der Kursschwankungen.

tragung, daß eine solche Deutung möglich ist.

Die Durchführung der Rechnung mit den früher erklärten Wochenmitteln ergibt als Summe der aufsteigenden Linienstücke die Zahl 3,318, als Summe der absteigenden die Zahl 1,473 entsprechend einer Differenz zwischen Ende und Anfang gleich 1,845. Die Zahlen stellen die Logarithmen der Gewinnfaktoren dar und diese selbst sind 2080 bezw. 29,7, entsprechend einem Quotienten von 70,0, d. h.: Der alleswissende Dämon, der sämtliche Kursschwankungen richtig voraussieht, hätte — bei höchstens einmaligem Umwechseln in der Woche — eine Mark vom November 1918 in 2080 ℳ im Juli 1922 verwandelt, bezw. einen Dollar von 1918 in 29,7 Dollar heute; er hätte dazu 34 mal wechseln müssen. Wie außerordentlich groß die entsprechenden Zahlen würden, wenn man nicht nur die Wochendurchschnittskurse, sondern etwa Tageskurse zugrunde legte, läßt sich in keiner Weise abschätzen.

4. Standpunkt der Fehlertheorie.

Wenn man die Berechtigung der linearen oder parabolischen Ausgleichung vom Standpunkt der mathematischen Statistik oder der Fehlertheorie aus prüfen will, so muß man untersuchen, ob die Abweichungen zwischen den beobachteten und den ausgeglichenen Werten wenigstens annähernd einem Gaußschen Fehlergesetz entsprechen. Dieser Ueberprüfung dient die Abb. 2. Hier findet man zunächst eine Treppenlinie, die in 190 Stufen von der Abszissenachse bis zur Höhe 190 ansteigt. Jeder einzelne Anstieg liegt an einer Stelle, dessen Abszisse gleich ist einem der 190 Differenzwerte zwischen einer Einzelbeobachtung und dem betreffenden ausgeglichenen Wert. Wenn die Differenzen dem Gaußschen Gesetz annähernd genügen, muß die Treppenlinie annähernd die Gestalt der Linie des Gaußschen Integrals aufweisen, wenn dieses in den richtigen Maßstäben aufgezeichnet wird. Der Ordinatenmaßstab ist durch die Höhe 190 gegeben, der Abszissenmaßstab oder die sogenannte Präzision der Beobachtungsreihe rechnet sich in bekannter Weise aus der Quadratsumme der Fehler. Die Durchführung ergibt für unsern Fall ein mittleres Fehlerquadrat von 0,0293 und diesem Werte entsprechend ist die Gaußsche Linie in Abb. 2 eingetragen. Man sieht, daß die Abweichungen zwischen dieser Linie und der Treppenlinie zwar erheblich sind, aber im großen Ganzen eine Uebereinstimmung erkennen lassen.

Vom Standpunkt der Fehlertheorie aus gewinnt man auch eine Beurteilung des Ausmaßes der zu erwartenden größten Schwankungen. Legt man den von v. Bortkiewicz[1]) berechneten Zusammenhang zugrunde, so entspricht einem mittleren Fehler von $\sqrt{0{,}0293} = 0{,}171$ bei 200 Beobachtungen eine erwartungsmäßige Variationsbreite von etwa 0,94, also eine im Mittel zu erwartende Höchstschwankung von $\pm 0{,}47$. Da $0{,}47 \sim \log 3$, stimmt dies auffallend gut mit dem Umstand überein, daß die bisherige Höchstabweichung von der Ausgleichslinie, im Februar 1920, eine dreifache Ueberschreitung war Die Ueberschreitung in der letzten Augustwoche[2]) ist eine 4,3fache, also logarithmisch etwa 30 vH größer als die größte bis dahin beobachtete.

[1]) Sitzungsber. d. Berliner math. Ges. 21, 1922, S. 3 bis 11.

[2]) Zusatz bei der Korrektur.

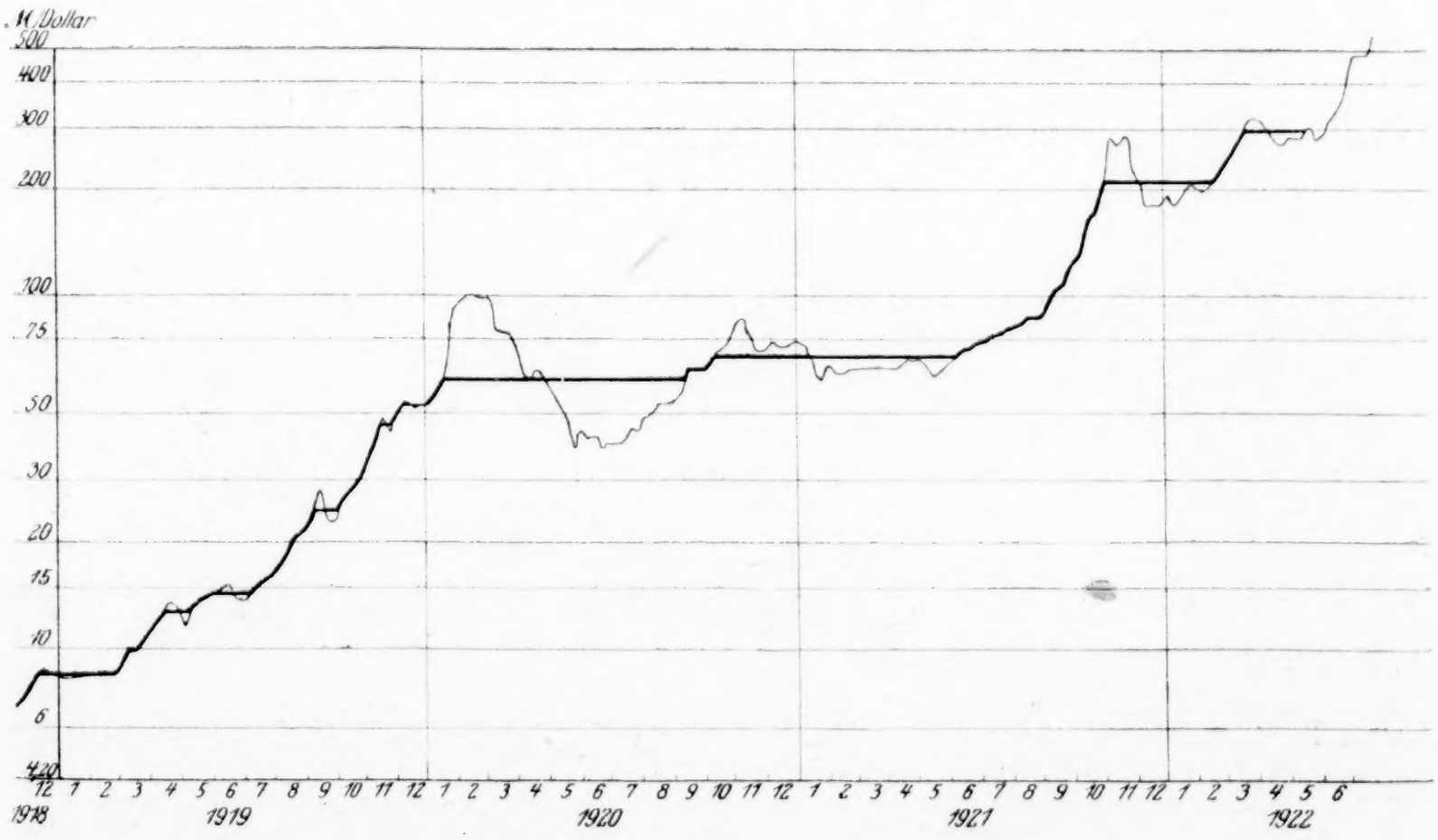


Abb. 3

Wochendurchschnitte und monotone Ausgleichslinie.

5. Beste Ausgleichung durch eine monoton ansteigende Linie.

Die Ausgleichung durch eine Gerade oder eine Parabel wird mancher als etwas Willkürliches empfinden. Mag dies berechtigt sein oder nicht, jedenfalls wird man ein Bedürfnis haben, zu untersuchen, ob sich nicht unabhängig von einer so engen Annahme, über die Trennung von Grundbewegung und Schwankungen etwas sagen läßt. Nun scheint es eine sehr allgemeine Forderung zu sein, diejenige Linie zu suchen, die vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt monoton ansteigt (d. h. so verläuft, daß sie nirgends abnimmt) und dabei unter allen so beschaffenen Linien diejenige ist, die sich der gegebenen am besten anpaßt. Als Maß der Anpassung wird man hier, wie immer, die Quadratsumme oder das Integralquadrat der Abweichungen nehmen. Es zeigt nun eine einfache analytische Ueberlegung, daß die beste monotone Approximation sich zusammensetzt aus Teilen der aufsteigenden Stücke der ursprünglichen Linie und wagerechten Geraden; diese letzteren liegen jeweils so, daß sie gleich große Flächenstücke zwischen sich und der ursprünglichen Linie einschließen. (Man erkennt nämlich sofort, daß dort, wo die monotone Ausgleichslinie von der auszugleichenden verschieden ist, die erstere nur eine wagerechte Tangente haben kann, und daraus folgt sofort das übrige.)

Unsere Abb. 3 zeigt neben der Kurve der logarithmierten Wochendurchschnitte die in dieser Weise bestimmte monotone Ausgleichslinie. Man erkennt, daß dieses Verfahren dazu führt, in anschaulichster Weise zwischen »wesentlichen« und »unwesentlichen« Teilen der gesamten Kursbewegung zu unterscheiden. Ueber viele einzelne Schwankungen schreitet die Ausgleichslinie hinweg, ohne von ihnen überhaupt berührt zu werden. Man kann in groben Zügen sagen, daß von dem jetzt gewonnenen Standpunkt aus betrachtet, die gesamte Kursbewegung in drei Perioden zerfällt, in einen Anstieg des Dollarpreises von 7 ℳ bis 60 ℳ in der Zeit von November 1918 bis Januar 1920, in eine Periode des Konstantbleibens bei ungefähr 65 ℳ von Januar 1920 bis Mai 1921 und drittens ein neuerliches Ansteigen von 65 ℳ aufwärts seit Juni 1921.

6. Schlußfolgerungen.

Wenn wir die wichtigsten Schlüsse, zu denen die mathematische Analyse der Kurslinie Veranlassung gibt, zusammenfassen wollen, so haben wir etwa folgendes zu sagen:

1. Die gesamte Bewegung des Geldwertes läßt sich in eine gleichförmige Grundbewegung und darüber gelagerte Schwankungen zerlegen; in der Grundbewegung kommt der jeweilige wirtschaftliche Zustand zum Ausdruck, in den Schwankungen die wechselnde Beurteilung der Lage und die Wirkung sonstiger vorübergehender Einflüsse.

2. Die Grundbewegung läßt sich mit großer Annäherung in der logarithmischen Darstellung als eine Gerade auffassen, woraus hervorgeht, daß der wirtschaftliche Zustand, d. i. das laufende Defizit unserer Gesamtwirtschaft, im Durchschnitt in den vier Jahren unverändert geblieben ist.

3. Die Neigung der die Grundbewegung darstellenden Geraden weist eine Verschlechterung des Geldwertes auf die Hälfte in je neun Monaten auf. Es mag hier besonders hinzugefügt werden, daß eine dauernd konstante Unterbilanz der nationalen Wirtschaft nicht einen unveränderlich schlechten Valutastand, sondern dauernde Verschlechterung mit unveränderlichem Exponenten bedeutet.

4. Die großen Schwankungen von langer Periode erheben sich, in Uebereinstimmung mit den Berechnungen vom Standpunkt der Fehlertheorie, über die Linie der Grundbewegung stellenweise bis zum dreifachen des Wertes der letzteren. Die Steigerung des Dollarkurses in den letzten Wochen des Beobachtungszeitraumes, die erheblich über dem Ausgleichswert von etwa 300 liegt, erreicht noch nicht den relativen Wert, der den Verhältnissen im Februar 1920 entspricht.

5. Da man annehmen darf, daß die wirtschaftlichen Zustände sich nicht in kurzem Zeitraum ändern können, bezw. daß einmal vorhandene Verhältnisse lange Zeit nachwirken, so kann man mindestens für ein Jahr voraussagen, daß das Maß der Verschlechterung, wie es unter 3. genannt wurde, noch einige Zeit fortbestehen wird; d. h. also, daß für Ende 1923 mit einem mittleren Dollarstand von mindestens 1300 zu rechnen ist, wobei das unter 4. angegebene Maß der Schwankungen mit zu berücksichtigen, mithin ein Höchststand von 4000 ℳ als im Bereich der durchschnittlichen Erwartung liegend anzunehmen ist.

6. Da sich durch die ganze Untersuchung die ausschlaggebende Bedeutung des Logarithmus des Wechselkurses ergeben hat, gelangt man auch zu einer Abschätzung, des Verhältnisses zwischen der Lage der deutschen Mark, der österreichischen Krone und der russischen Rubels; danach hat die deutsche Mark, wenn man nur die Grundbewegung in Betracht zieht, mehr als die Hälfte des Weges der österreichischen Krone und etwa ein Drittel des Weges des russischen Rubels bereits zurückgelegt.

7. Nachträglicher Zusatz. Die bis zur letzten Augustwoche eingetretene äußerlich ganz abnorm scheinende Kursbewegung tritt aus dem Rahmen des Bisherigen nicht sehr stark heraus. Es bleibt abzuwarten, ob die am Schlusse von Pkt. 3 des Textes angedeutete ungünstigere Auffassung der Grundbewegung unvermeidlich sein wird. Die Fortführung der Linien in Abb. 1 bis Ende August würde eine starke Erhebung über die Ausgleichsgerade ergeben, die zwar steiler, aber nicht wesentlich höher verläuft als die im Februar 1920.

2. Zeichnerische Ermittlung von Fourier-Koeffizienten. Das kürzlich wieder veröffentlichte[1]) Hermannsche Verfahren zur angenäherten Berechnung der Koeffizienten einer Fourierschen Entwicklung

$$f(x) = a_0 + \Sigma\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

bringt die Lösung der gesamten Aufgabe in die Form einer so einfachen Rechenvorschrift, daß die Ausführung auch durch mathematisch nicht vorgebildete Kräfte möglich wird. Natürlich kann dies nur auf Kosten der Genauigkeit und vor allem der Zuverlässigkeit geschehen und es lassen sich leicht Fälle angeben, bei denen die starre Anwendung der Vorschrift, die nur ganz bestimmte Funktionswerte berücksichtigt und sonst alles außer Betracht läßt, zu ganz falschen Ergebnissen führt[2]).

Im folgenden soll ein einfaches zeichnerisches Verfahren mitgeteilt werden, das Herr Prof. v. Mises in seinen Vorlesungen zu entwickeln pflegt. Es hat neben der Einfachheit der Ausführung den Vorzug größerer Genauigkeit und Zuverlässigkeit, weil in beliebigem Maße auch der Verlauf der Kurve im Innern der einzelnen Intervalle berücksichtigt werden kann.

Die Konstruktion von a_0 geschieht nach dem bekannten Verfahren der zeichnerischen Quadratur.

Die Formeln für a_n und b_n schreibe ich in folgender Weise

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\,d(\sin nx),$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\,d(\cos nx).$$

Ich könnte also auch hier das gewöhnliche Verfahren der zeichnerischen Quadratur verwenden, wenn ich für jeden Koeffizienten eine besondere Kurve aufzeichnen wollte, bei der der Funktionswert $f(x)$ in den Punkt mit der Abszisse $\sin nx$ bezw. $\cos nx$ zu liegen kommt. Diese Verschiebungen, die natürlich viel zu umständlich wären, lassen sich aber gänzlich umgehen.

Ich will zunächst allgemein zeigen, wie

$$\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\,d(\cos nx),$$

also im wesentlichen b_n zu konstruieren ist. Das Intervall $0 \ldots 2\pi$ wird in m gleiche Teile geteilt, und in jedem Intervall ein »mittlerer« Funktionswert $f_1, f_2, \ldots$ bestimmt; eine genauere Vorschrift hierzu wird später gegeben werden. Ein Polstrahlensystem mit der Polhöhe h liefert die Richtungen (Abb. 1)

$$\operatorname{tg}\varphi_\nu = \frac{f_\nu}{h} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots m)\,.$$

Auf der Peripherie eines Kreises vom Radius h markiere ich die Punkte mit den Bögen $nx_1, nx_2, \ldots$ (in Abb. 2 ist $n = 2$, $m = 8$ gewählt) und ziehe durch jeden Punkt die Senkrechte zur Anfangsrichtung. Ferner konstruiere ich im Punkte O anfangend einen Polygonzug, dessen Seiten parallel zu den Polstrahlen sind und dessen Ecken auf den Senkrechten durch $nx_1, nx_2 \ldots$ liegen. Die Stücke, die auf den Vertikalen abgeschnitten werden, sind

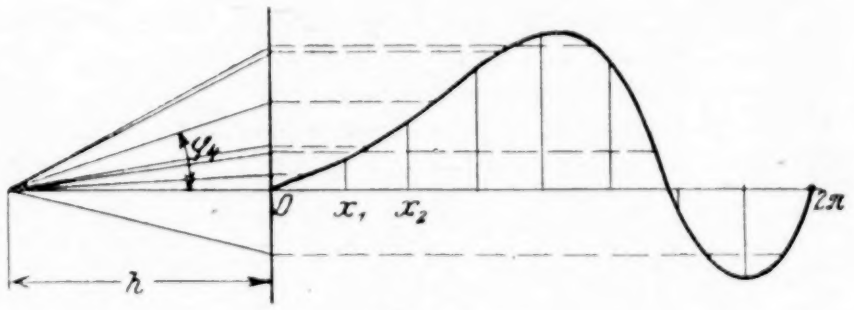


Abb. 1

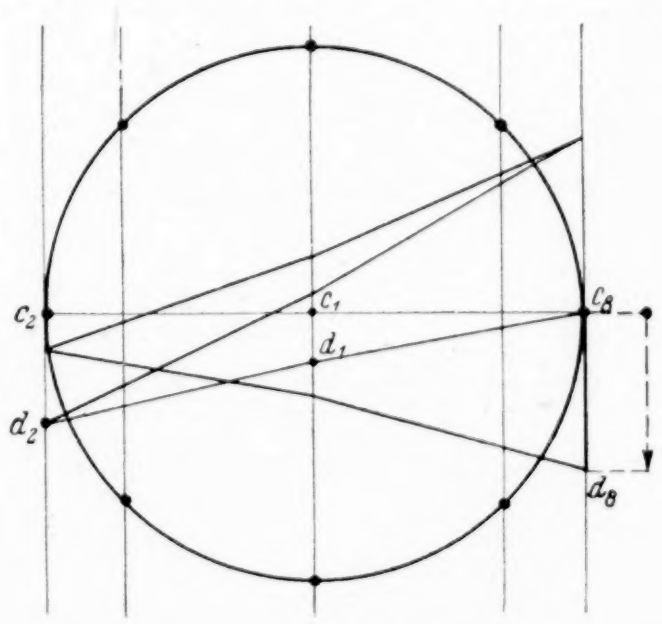


Abb. 2

$$\overline{c_1 d_1} = \operatorname{tg}\varphi_1\, h\,(\cos nx_1 - \cos nx_0) = f_1\,(\cos nx_1 - \cos nx_0)$$

$$\overline{c_2 d_2} = \overline{c_1 d_1} + f_2\,(\cos nx_2 - \cos nx_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{c_m d_m} = \sum_\nu f_\nu\,(\cos nx_\nu - \cos nx_{\nu-1})\,.$$

Wenn die »mittleren« Funktionswerte richtig gewählt worden sind, ist der letztere Ausdruck identisch mit

[1]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 153 bis 156.

[2]) Ein solches Beispiel hat Herr Dr. Röver in einer Zuschrift an den Herausgeber mitgeteilt. Wenn man für die Funktion $f(x) = 1 + \cos 10x$ mit den Herrmannschen Schablonen rechnet, erhält man $a_{10} = 2$, während richtig $a_{10} = 1$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, d(\cos nx) = -n\pi b_n .$$

Bleibt nur noch die Bestimmung der »mittleren« Funktionswerte f_ν. Bei genügend engen Intervallen wird man in der Regel einen passend zwischen dem größten und kleinsten Funktionswert gelegen Wert schon nach dem Augenmaß genügend genau abschätzen können. Darüber hinaus dient die folgende Ueberlegung. Für die (nicht wirklich gezeichnete) Kurve der von x nach $\cos nx$ verschobenen Funktionswerte könnte ich das gewöhnliche Verfahren der zeichnerischen Quadratur anwenden. Hier hätte ich also im Sinne der Simpsonschen Regel, wenn — was im allgemeinen genau genug sein wird — der Bogen im Intervall als Parabel 2. oder 3. Grades angesehen werden darf, in der Intervallmitte 2/3 der Höhe zwischen Sehne und Kurve zu nehmen (Abb. 3).

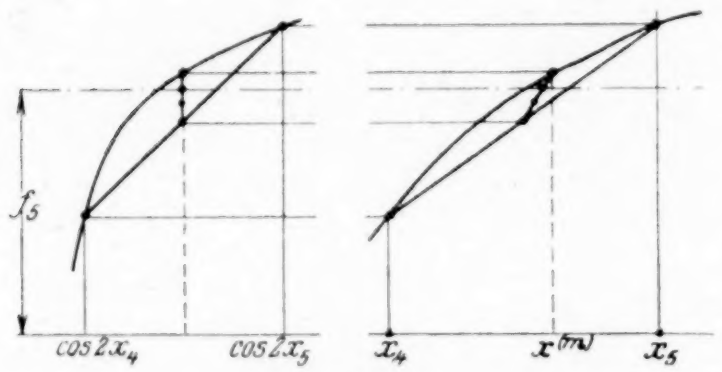


Abb. 3

Wie kann ich aber diese Höhe aus dem unverschobenen Bilde von $f(x)$ erhalten? Dazu habe ich nur in Abb. 2 den Wert $x_\nu^{(m)}$ abzulesen, der der Intervallmitte in dieser Figur $\frac{1}{2}(\cos nx_\nu + \cos nx_{\nu-1})$ entspricht, und dann in Abb. 1 den Funktionswert in diesem Punkte aufzusuchen. Dabei genügt es natürlich, das Verhältnis, in dem der Kreisbogen zwischen $nx_{\nu-1}$ und nx_ν geteilt wird, nach Augenmaß in die Abb. 1 (s. auch Abb. 3) zu übertragen. Die Höhe der Sehnenmitte ergibt sich als arithmetisches Mittel der End-Ordinaten auf der Sehne der ursprünglichen Kurve in der Mitte des Intervalls $x_{\nu-1}$, x_ν. Ich brauche also nur in den Intervallen, bei denen die einfache Schätzung nicht auszureichen scheint, den Höhenabstand zwischen der Sehnenmitte und dem aus dem Kreisbild zurückübertragenen mittleren Kurvenpunkt zu dritteln, um eine Lösung mit der Genauigkeit der Simpsonschen Formel zu erhalten.

Die Konstruktion der a_n erfolgt ganz analog, nur daß jetzt ein Polygon aus den Senkrechten zu den Polstrahlen zu zeichnen ist, und zwar zwischen den Horizontalen, die durch die Punkte der Kreisperipherie in Abb. 2 hindurchgehen.

In Abb. 4 ist die vollständige Durchführung der Konstruktion für eine willkürlich angenommene Kurve zu ersehen. Das gesamte Intervall der gegebenen Linie, das in der Originalzeichnung die Länge $l = 24$ cm hat, ist in 24 gleiche Teile geteilt und zu jedem Teilintervall, soweit das Kurvenstück darin nicht als völlig geradlinig gelten kann, der Sehnenmittelpunkt bestimmt. Zunächst werden zur Bestimmung von a_0 die mittleren Höhen der einzelnen Teilintervalle in der gewöhnlichen Weise nach der Simpsonschen Regel bestimmt und durch Wagerechte auf die Ordinatenachse übertragen; links von dieser ist im Abstande $h = 10$ cm ein Pol gewählt, von dem die Polstrahlen nach den angezeichneten Punkten der Ordinatenachse gezogen werden. Durch Parallelziehen zu den Polstrahlen entsteht der in der Abbildung ersichtliche Seilzug über der Strecke l, dessen Endordinate A_0 das h:l-fache des ersten Kaeffizienten a_0 darstellt. In unserem Beispiel ist daher

$$A_0 = 2{,}95\text{ cm} \qquad a_0 = 1{,}23.$$

Zur Konstruktion der weiteren Koeffizienten dient der in der Ecke links unten gezeichnete Kreis vom Halbmesser $r = 5$ cm, dessen Peripherie in 24 gleich Teile geteilt ist. Durch jeden Teilpunkt ist in genügender Länge je eine wagerechte und eine lotrechte Gerade gezogen. Die einzelnen Seilzüge, die zur Berechnung der Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots$; $b_1, b_2 \ldots$ führen, haben ihre Eckpunkte auf diesen Geraden und zwar die Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots$ auf den wagerechten, die $b_1, b_2 \ldots$ auf den lotrechten. Bevor man den ersten dieser Seilzüge zeichnet, muß man sich davon überzeugen, ob die bei Bestimmung von a_0 benutzten mittleren Höhen der einzelnen Intervalle bezw. die von ihnen abhängigen Polstrahl-Richtungen noch brauchbar sind, oder eine kleine Korrektur in dem früher erklärten Sinne erhalten müssen. An unserem Beispiel ist zu sehen, in welcher Weise beim ersten Teilinterval durch Halbieren des Abstandes der ersten zwei Lotrechten und Zurückgehen auf den betreffenden Punkt in der ursprünglichen Kurve eine Verbesserung der ersten Polstrahl-Richtung vorgenommen wurde. In der Regel wird eine solche Korrektur höchstens für die Intervalle nötig sein, die in der Nebenfigur ganz rechts oder ganz links bezw. ganz oben oder ganz unten liegen. Jedesmal, wenn man zu einem neuen Koeffizienten übergeht, muß man von Neuem überlegen, ob und für welche Intervalle etwa eine Korrektur erforderlich ist. Diese Arbeit kann niemals eine sehr umständliche werden, da sich die Notwendigkeit der Aenderung nur in Ausnahmefällen ergibt.

Bei der Bestimmung von b_2 benutzt man für die Ecken des Seilzuges die gleichen Lotrechten wie bei b_1; läßt aber jetzt jede zweite aus, ebenso werden bei b_3 je zwei ausgelassen usw. Zu beginnen ist jedesmal bei der ersten Geraden rechts, der letzte Punkt des Seilzuges liegt jedesmal auch auf dieser Geraden, wobei man naturgemäß bei b_1 einmal, bei b_2 zweimal, bei b_3 dreimal usw. über das Intervall $2r$ hin- und zurückgegangen ist. Der letzte Seilzug besteht jedesmal aus lauter Strecken, die über die ganze Intervallbreite $2r$ hinüberzu-

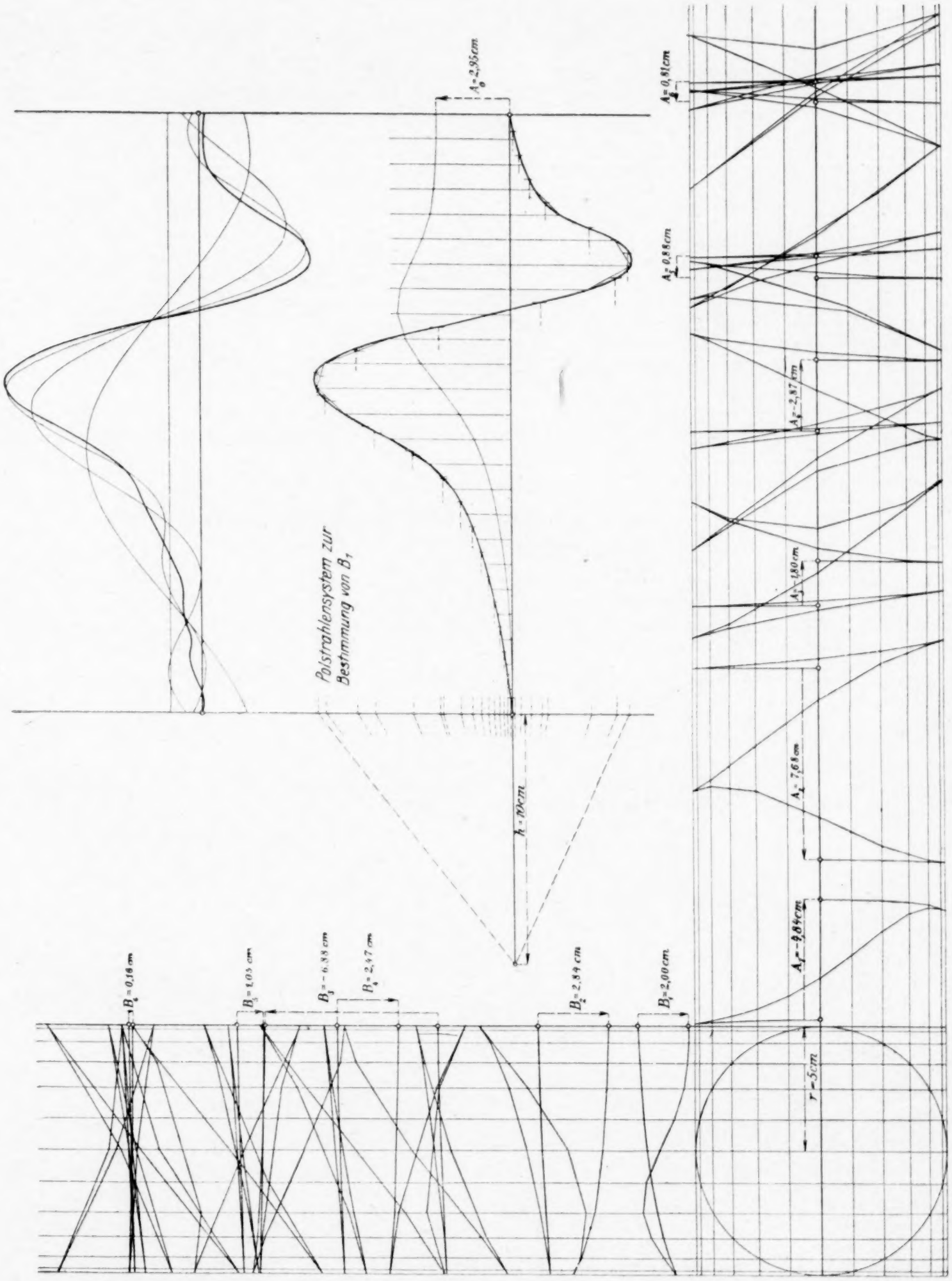


Abb. 4. Zeichnerische Ermittlung der ersten 13 Fourier-Koeffizienten.

ziehen sind. Der Abstand zwischen dem Anfangs- und Endpunkte jedes Seilzuges mit dem Verhältnis $r:h$ multipliziert liefert dann den gesuchten Wert für das $n\pi$ fache des betreffenden Koeffizienten. Dabei ist als Vorzeichenregel zu beachten, daß ein unter dem Anfangspunkt liegender Endpunkt positives b, ein oberhalb des Anfangspunktes liegender Endpunkt negatives b bedeutet. Die Abstände zwischen Anfangs- und Endpunkt werden in cm abgelesen, mit $h:r=2$ multipliziert und durch das betreffende Vielfache von π dividiert, wofern man nicht vorzieht, den Faktor π ein für allemal herauszuheben. Die in der Konstruktion abgelesenen Abstände B und die daraus bestimmten Koeffizienten b sind folgende:

$B_1 =$	2,00 cm	$b_1 =$	1,27
$B_2 =$	2,84 »	$b_2 =$	0,90
$B_3 =$	− 6,88 »	$b_3 =$	− 1,46
$B_4 =$	2,47 »	$b_4 =$	0,39
$B_5 =$	1,05 »	$b_5 =$	0,13
$B_6 =$	0,16 »	$b_6 =$	0,02

Die Konstruktion der Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots$ erfolgt mit Hilfe der Seilzüge, die auf dem unteren Teil der Abb. 4 erkennbar sind, jedesmal bei der mittleren Wagerechten beginnen, von da nach oben fortschreiten, sich dann abwärts wenden und schließlich von der untersten Wagerechten wieder nach der Mitte zurückgehen. Die einzelnen Strecken des Seilzuges sind den betreffenden Polstrahlen nicht parallel, sondern zu ihnen senkrecht zu ziehen. Der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt, die jetzt beide auf der mittleren Wagerechten liegen, liefert wieder mit $h:r$ multipliziert das $n\pi$ fache des betreffenden Koeffizienten. Als Vorzeichenregel gilt, daß ein links vom Anfangspunkt liegender Endpunkt positives a, ein rechts vom Anfangspunkt liegender Endpunkt negatives a bedeutet. Die abgelesenen Strecken A und die darus berechneten Koeffizienten a sind folgende:

$A_1 =$	− 1,84 cm	$a_1 =$	− 3,08
$A_2 =$	7,68 »	$a_2 =$	2,45
$A_3 =$	− 1,80 »	$a_3 =$	− 0,38
$A_4 =$	− 2,87 »	$a_4 =$	− 0,46
$A_5 =$	0,88 »	$a_5 =$	0,11
$A_6 =$	0,81 »	$a_6 =$	0,09.

Die Konstruktion läßt unmittelbar erkennen, wie weit man bei einer gegebenen Teilung des Hauptintervalles mit der Berechnung der Koeffizienten gehen kann. Denn offenbar ist es unzulässig, über die äußeren Begrenzungslinien der Seilzüge mit einem Seilstrahl hinwegzugehen. Daraus folgt, daß man mit 21 Teilen nur bis zu dem 6. Koeffizienten gehen kann, allgemein das Vierfache des höchsten Koeffizienten-Index als Intervallzahl nehmen muß. Man kann aber, und dies ist ein besonderer Vorteil des zeichnerischen Verfahrens, sobald sich am Schlusse der Berechnung die Notwendigkeit herausstellt, noch weitere Koeffizienten zu suchen, dies ohne weiteres tun, indem man jetzt eine Halbierung der Teilentervalle vornimmt und mit deren Hilfe die höheren Koeffizienten in der gleichen Weise konstruiert. In Abb. 4 ist oberhalb des Bildes der gegebenen Kurve die Linie gezeichnet, die sich durch Zusammensetzung der ersten vier berechneten harmonischen Funktionen ergibt. Wie man sieht, reichen hier die ermittelten Koeffizienten bis zum Index 4 schon einigermaßen hin, um den wesentlichen Verlauf der Linie wiederzugeben.

H. Friesecke. 198

3. Das Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine. Das gewöhnliche Verfahren des Quadratwurzelziehens auf der Rechenmaschine beruht auf der Tatsache, daß die Differenzen aufeinanderfolgender Quadratzahlen die Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 ... bilden. Bei großen Zahlen, bezw. wenn eine größere Stellenzahl im Resultat erforderlich ist, wird die Durchführung der Rechnung sehr langwierig. Vor allem wird die etwaige Kenntnis eines ersten Näherungswertes, die man wohl in der Regel voraussetzen darf, nicht genügend ausgenutzt. Ein Verfahren, das zum Quadratwurzelziehen auf der Rechenmaschine geeignet ist und ganz besonders dann vorteilhaft erscheint, wenn man einen guten Näherungswert kennt, ist folgendes.

Bekanntlich gilt die Beziehung

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}} \qquad \ldots (1).$$

Ist $2a$ nur einigermaßen größer als b, so konvergiert dieser Kettenbruch ziemlich rasch. Die Näherungsbrüche des Kettenbruches (1) kann man leicht auf der Rechenmaschine auswerten. Bezeichnen wir mit z_ν den Zähler, mit n_ν den Nenner des νten Näherungsbruches von (1), so sind die zwei ersten Näherungsbrüche

$$\frac{z_1}{n_1} = \frac{a}{1} \qquad \frac{z_2}{n_2} = \frac{2a^2 + b}{2a};$$

die folgenden kann man nach der Rekursionsformel

$$\frac{z_\nu}{n_\nu} = \frac{2a\, z_{\nu-1} + b\, z_{\nu-2}}{2a\, n_{\nu-1} + b\, n_{\nu-2}} \qquad \ldots\ldots (2).$$

berechnen.

Die Aufgabe zerfällt also in zwei Teile: die Aufsuchung eines passenden a als ersten Näherungswertes und darauffolgende rekurrierende Berechnung der Brüche nach (2).

Wir bezeichnen mit $(AB, CD \ldots)$ die Zahl, deren einzelne, aufeinanderfolgende Ziffern (0 bis 9) $A, B, C, D \ldots$ sind und die den Dezimalpunkt zwischen B und C hat. Um die Quadratwurzel der ganzen Zahl $c = (ABCD \ldots)$ zu finden, verfährt man folgendermaßen: Es sei die Anzahl der Ziffern von c eine gerade Zahl (was stets zu erreichen ist, indem man ev. $A = 0$ setzt); nun teilt man in der üblichen Weise von links nach rechts zu je 2 Ziffern ab. Hierauf sucht man das zu (AB) oder $(ABCD)$ nächstliegende (kleinere) Quadrat d^2, so daß im zweiten Falle

$$(ABCD, EF \ldots) = d^2 + r \qquad \ldots (3),$$

wo r den Unterschied $(ABCD, EF \ldots)$ minus d^2 bedeutet. Es genügt natürlich, statt aus $c = (ABCDEF \ldots)$ die Quadratwurzel aus $(ABCD, EF \ldots)$ zu ziehen, da wir dann nur das Resultat mit einer entsprechenden Potenz von 10 multiplizieren müssen. Die vierstelligen Quadratzahlen wird man meist im Kopf haben oder leicht herstellen können. Sind Tafeln zur Verfügung, so kürzt man das Verfahren um so mehr ab, je mehr Stellen schon bei der Wahl von d berücksichtigt werden. Jedenfalls nehmen wir das in der angegebenen Weise bestimmte d als a in (1) an, r als b, stellen den früher angegebenen Kettenbruch auf und bilden in der angegebenen Weise die Näherungsbrüche.

Beispiele.

a) ohne Benutzung von Tafeln.

$$\sqrt{17\,18\,34} = 10\sqrt{17\,18,34}.$$

Die nächstkleinere Quadratzahl zu 1718 ist $1681 = 41^2$, also haben wir $a = 41$, $r = 37{,}31$,

$$\sqrt{17\,18,34} = \sqrt{41^2 + 37,34} = 41 + \cfrac{37,34}{82 + \cfrac{37,34}{82 + \ldots}}$$

Die Näherungsbrüche lauten:

$$41; \qquad 41\frac{3734}{8200} = 41,455;$$

$$41\frac{306\,188}{676\,134} = 41,45\,285;$$

$$41\frac{25\,246\,843}{55\,745\,442} = 41,45\,289 \quad \text{usw.}$$

Es ist demnach bestimmt

$$\sqrt{17\,18\,34} = 414,529\ldots.$$

b) mit Verwendung einer dreistelligen Quadrattafel.

$$\sqrt{10\,00\,00}.$$

Die nächstniedere Quadratzahl zu 100000 ist

$99\,856 = 316^2 = a^2$ Rest $b = 144$

$$\sqrt{10\,00\,00} = \sqrt{316^2 + 144} = 316 + \cfrac{144}{632 + \cfrac{144}{632 + \ldots}}$$

Die Näherungsbrüche lauten:

$$316; \qquad 316\frac{144}{632} = 316,2278$$

$$316\frac{144}{632,22\,784} = 316,22\,776 \quad \text{usw.}$$

Es ist demnach bestimmt

$$\sqrt{10\,00\,00} = 316,2278\ldots.$$

St Bergmann. 169

BUCHBESPRECHUNGEN

EICHELBERG, Die thermischen Eigenschaften des Wasserdampfes im technisch wichtigen Gebiet. Heft 220 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. 31 S. 9. Abb.

Unsere heutige Kenntnis von dem thermischen Verhalten des überhitzten Wasserdampfes verdanken wir hauptsächlich den Arbeiten des Münchner Laboratoriums für technische Physik. Dort wurde von Knoblauch, Linde und Klebe[1]) die Beziehung zwischen Druck, Temperatur und Volumen (p, T, v), d. h. die Zustandsgleichung, experimentell bestimmt und später in mehreren aufeinander folgenden Arbeiten durch Knoblauch, Jakob, H. Mollier und Winkhaus[2]) die Abhängigkeit der spezifischen Wärme für konstanten Druck (c_p) vom Druck und von der Temperatur untersucht.

Zwischen beiden Größengruppen besteht die theoretische Beziehung:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -AT\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p.$$

Die Form dieser Beziehung macht es erklärlich, daß die verschiedenen empirischen Zustandsgleichungen, die in ausgezeichneter Uebereinstimmung mit den $p\,v\,T$-Versuchen aufgestellt wurden, nach obiger Gleichung c_p-Werte ergaben, die weit von den Versuchswerten abwichen. Wir verdanken M. Jakob[3]), der durch graphische Integration aus den Versuchswerten von c_p eine völlig befriedigende Zustandsgleichung erhielt, den Nachweis, daß die beiden Versuchsarbeiten in völliger Uebereinstimmung stehen. Nun war noch eine rechnerische Lösung der Aufgabe erforderlich, die nach weniger befriedigenden Versuchen Anderer, in der vorliegenden Arbeit in erschöpfender Weise gefunden ist.

Der Verfasser geht bei der Darstellung der Versuchswerte von c_p von einer Gleichungsform aus, die eine sehr hübsche graphische Ermittlung der Koeffizienten ermöglicht. Die Gleichung lautet allgemein:

$$c_p - c_p^0 = \frac{f_1(p)}{T^\alpha} + \frac{f_2(p)}{T^\beta} + \frac{f_3(p)}{T^\gamma}.$$

Die nähere Untersuchung, die zeigt, daß schon zwei Glieder für den vorliegenden Zweck genügen, führt den Verfasser zu folgendem Ausdruck für c_p:

$$c_p = c_p^0 + \frac{C_1 p}{T^4} + \frac{C_2 (p + 2\cdot 10^4)^{3,2} - C_3}{T^{15}}$$

Den Grenzwert der spezifischen Wärme im idealen Gaszustand c_p^0 setzt der Verf.:

$$c_p^0 = 0{,}345 + 0{,}0_3\,197\,T + \frac{5500}{T^2};$$

$C_1 = 3{,}2\cdot 10^4 \quad C_2 = 2{,}83\cdot 10^{22} \quad C_3 = 1{,}64\cdot 10^{36}$.

Neben dieser Gleichung, der der Verfasser vorläufig den Vorzug gibt, ermittelt er noch eine zweite mit etwas anderen Koeffizienten, die die Versuchsergebnisse ebenso genau wiedergibt, sie lautet:

$$c_p = c_p^0 + \frac{3{,}2\left(\frac{p}{10^4}\right)}{\left(\frac{T}{100}\right)^4} + \frac{1{,}41\cdot 10^5\left[\left(\frac{p}{10^4}+1\right)^{2,8} - 1\right]}{\left(\frac{T}{100}\right)^{14}}.$$

[1]) Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure, Heft 21.

[2]) Letzter zusammenfassender Bericht von Knoblauch und Winkhaus, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1915, S. 376.

[3]) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1912, S. 1980.

Beide Gleichungen weichen von den Versuchskurven um weniger als 1 vH ab.

Aus diesen Gleichungen folgt sofort die Zustandsgleichung. Die bei der Integration auftretende $f(p)$, die im allgemeinen nicht $=0$ ist, kann im Geltungsbereich der Gleichung vom Verfasser vernachlässigt werden.

Der ersten c_p-Gleichung entspricht dann folgende Zustandsgleichung:

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{1{,}139}{\left(\frac{T}{100}\right)^3} - \frac{11\,615\left(\frac{p}{10^4}+2\right)^{2{,}2}}{\left(\frac{T}{100}\right)^{14}}$$

$R = 47{,}06$ v in cbm/kg p in kg/qm.

Die Gleichung zeigt keine größeren Abweichungen von den Versuchen als 3 vT.

Es bietet nun keine weiteren Schwierigkeiten, Ausdrücke für andere wichtige thermimische Größen, wie den Wärmeinhalt, die Entropie usw. zu entwickeln. Aus dem Wärmeinhalt im Sättigungszustand berechnet der Verfasser die Verdampfungswärme und findet sie in ausgezeichneter Uebereinstimmung mit den Versuchen von Henning[1]).

Interessant ist auch die vom Verfasser gegebene Berechnung und zeichnerische Darstellung der spezifischen Wärme für constantes Volumen c_v und des Unterschiedes $c_p - c_v$. Ferner zeigt der Verfasser, daß der Exponent der Adiabate $-\frac{v}{p}\frac{dp}{dv}$ vom Druck praktisch unabhängig ist, und auch von der Temperatur in so geringem Maße beinflußt wird, daß der übliche konstante Wert 1,3 für praktische Rechnungen auch fernerhin beibehalten werden darf.

Der Verfasser berechnet ferner den aus seiner Gleichung folgenden Ausdruck für das Potential: $\varphi = s - \frac{i}{T}$ und zeigt, daß seine Gleichung auch mit der Spannungskurve des Wasserdampfes in sehr guter Uebereinstimmung steht.

Zum Schluß fügt der Verfasser einige Betrachtungen über die Brauchbarkeit seiner Gleichung zur Extrapolation über das Versuchsgebiet hinaus an.

Dem Aufsatz ist ein Entropie-Temperatur-Diagramm nebst Hilfsdiagrammen beigegeben.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Zustandsgleichung des Verfassers das gesamte Versuchsmaterial über Wasserdampf mit kaum zu übertreffender Genauigkeit wiedergibt und daher für alle praktischen Rechnungen volle Sicherheit gewährt. Darüber hinaus kann sie die Grundlage für interessante theoretische Untersuchungen bieten. Besonders wichtig wäre vor allem ein Vergleich des thermischen Verhaltens des anormalen (assoziierenden) Wasserdampfes mit normalen Stoffen.

Zum Schluß noch eine Bemerkung: die Form der Gleichung für c_p und damit die der Zustandsgleichung ist vom Verfasser im Hinblick auf die erwähnte graphische Methode der Koeffizientenbestimmung gewählt worden. Sieht man davon ab, so wäre es näher liegend, für c_p einen nach Potenzen von p entwickelten Ausdruck zu wählen, also:

$$c_p = c_p^0 + f_1(T)\cdot p + f_2(T)\,p^2 + f_3(T)\,p^3 + \ldots$$

die Zustandsgleichung erscheint dann in der Form:

$$v = \frac{RT}{p} + F_1(T) + F_2(T)\,p + F_3(T)\,p^2 + \ldots$$

Beachtet man, daß in den beiden vom Verfasser als gleichwertig bezeichneten Ausdrükken für c_p, die Druckfunktion im letzten Glied die Exponenten 3,2 bezw. 2,8 aufweist, so ist es klar, daß auch der Exponent 3 ebensogut zum Ziele führen muß und damit würde die Gleichung des Verfassers in die eben gegebene Form übergehen. Mollier. 147

[1]) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., 1909, S. 1768.

P. **METH,** Theorie der Planetenbewegung. 2. Aufl., II + 54 S., 14 Fig. i. Text. Leipzig u. Berlin 1921, Teubner. kl. 8°. Math.-phys. Bibl., Bd. 8.

Gegenüber der ersten Auflage, die Referent in der Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 62, S. 439 besprochen hatte, ist manches geändert worden. Das dort eingeschaltete Kapitel über Zeitrechnung fiel mit gutem Grund fort, wohl nicht nur, weil inzwischen »in dieser Sammlung ein Bändchen über Zeitrechnung erschienen ist«. In die einleitenden Sätze aus der Mechanik wurde eine knappe Darlegung des Hamiltonschen Hodographen aufgenommen, den der Verfasser jetzt statt der Differentiation der Bewegungsgleichungen zur Ableitung des Newtonschen Gesetzes benutzt; gewiß eine Bereicherung der leicht zugänglichen wohlfeilen Literatur zur elementaren Mechanik. Nicht wenige Formeln und Figuren bekamen ein anderes Gesicht. Im ganzen ist der enge Rahmen wieder gut ausgenutzt zur Einführung in die die Keplersche Ellipse bedingenden Kräfte. Neben dieser neuen Ausgabe behält die erste ihre eigene Note, die von manchem Leser vorgezogen werden mag.

H. E. **TIMERDING,** Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung. 2. Aufl., IV + 51 S., 25 Fig. i. Text, 1 Porträt. Leipzig u. Berlin 1921, Teubner. kl. 8°. Math.-phys. Bibl., Bd. 5.

Der Titel der Schrift deckt genau den Inhalt, der die Geburtsstunde der exakten Mechanik behandelt. Galileis Ueberlegungen und Forschungsmethoden machen den Hauptgegenstand aus, allgemeine Gesichtspunkte sind in den Vordergrund gerückt und die Kenntnis unserer Tage ist nicht außer acht gelassen. Das Büchlein bildet eine erste Einführung in die Bewegungslehre auf geschichtlicher Grundlage, und als besonderes Verdienst darf es für sich in Anspruch nehmen, manchen Leser veranlaßt zu haben und noch zu veranlassen, daß er zu dem anregenden Buche Ernst Machs »Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt« greift.

Kiel. Wirtz. 138

P. **RIEBESELL,** Dr. a. o. Prof. der Versicherungsmathematik und Statistik an der Universität Hamburg. Steuer-Mathematik. Die Fehler in den Reichssteuertarifen. Mit 16 Abbildungen im Text. Henri Grand, Hamburg 1922. 32 S.

In diesem kleinen Büchlein stellt der Verfasser in übersichtlicher Weise die rationellen Berechnungsgrundlagen verschiedener Arten von Steuertarifen dar. Die Ausführungen sind leicht faßlich und setzen beim Leser nur die Kenntnisse voraus, die nach den gegenwärtigen Lehrplänen in den Oberklassen der höheren Schulen erworben werden können. Auch eine Reihe von Abbildungen ergänzt in zweckmäßiger Weise die Darstellung, die geeignet ist und hoffentlich auch dazu führen wird, den mit der Bearbeitung neuer Tarife Beschäftigten ihre Verantwortlichkeit in sachlicher Hinsicht zum Bewußtsein zu bringen.

Mises.

WALTHER **ZIMM,** Dr.-Ing. Ueber die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl. Heft 234 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1921. 36 S.

Der Verfasser berichtet nach einer kurzen theoretischen Einleitung über Versuche, die er im physikalischen Institut der Universität Kiel unter Leitung von Prof. Dr. L. Weber-Kiel ausgeführt hat. Dabei wurde mit Absicht die Geschwindigkeit der Luftströmung so gering gewählt, daß die Elastizität der Luft außer acht bleiben durfte. Das Hauptziel der Untersuchung war, den Einfluß eines aus einer Düse austretenden freien Luftstromes auf die umgebende Luft festzustellen. Zur Geschwindigkeitsmessung wurde ein sehr empfindliches Verfahren elektrischer Heizdrahtmessung angewandt. Die Versuchsergebnisse bestätigten die theoretische Annahme des Vorhandenseins einer sekundären Luftbewegung, die die kinetische Energie des eigentlichen Strahles aufnimmt und allmählich aufbraucht. Mann kann die sorgfältig durchgeführte Arbeit als ersten erfolgreichen Versuch einer genaueren Erforschung der freien Luftstrahlen begrüßen.

Mises.

C. V. L. **CHARLIER,** Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik. Verlag Scientia Lund, Hamburg 1920. 125 S.

Der bekannte schwedische Astronom C. V. L. Charlier, der sich seit vielen Jahren mit großem Erfolge auf dem Gebiete der mathematischen Statistik betätigt, legt jetzt in deutscher Sprache eine kurze Zusammenfassung von Vorlesungen über die Grundzüge dieses Wissensgebiets vor. Er bekennt sich im Vorwort als ein entschiedener Anhänger von Pearson und will vor allem die praktischen Methoden zur Bearbeitung statistischen Materials darstellen und lehren. Das wesentlichste Kennzeichen des Buches ist, daß in einer großen Zahl von Beispielen bestimmte Einzelfälle statistischer Aufnahmen vollständig durchgerechnet werden, während die mathematische Ableitung der benutzten Begriffe, Formeln und Lehrsätze fast vollständig unterdrückt wird. Wer sich über diese Lücke hinwegsetzt, sei es, daß ihn die Ableitungen nicht interessieren, oder daß er imstande ist, sie selbst zu ergänzen, wird aus dem Buch in ausgezeichneter Weise das praktische Handwerkszeug des Statistikers kennen lernen.

Das Buch zerfällt inhaltlich in zwei Hauptabschnitte, von denen der erste die »Homograde oder alternative Statistik« der zweite die »Heterograde oder qualitative Statistik« behandelt. Gemeint sind unter dem ersten Schlagwort alle jene Fälle, bei denen die einzelnen Beobachtungszahlen, die als Elemente der statistischen Reihe auftreten, aus der Abzählung vieler einzelner Alternativen hervorgegangen sind, also z. B. die Reihe der Sterblichkeitszahlen eines Landes in aufeinanderfolgenden Jahren, die Reihe der Knabenquoten der Geburten in verschiedenen räumlichen oder zeitlichen Abschnitten und dergl. Dagegen beschäftigt sich die heterograde Statistik mit Beobachtungsreihen, bei denen eine solche Zurückführung jeder einzelnen Beobachtungsgröße auf eine bestimmte Anzahl von Alternativen nicht möglich ist, also z. B. mit der Reihe der Körperlängen von Rekruten oder mit der Reihe der Regenmengen an einem bestimmten Ort in aufeinanderfolgenden Jahren oder dergl. Bei der ersten Gruppe von Problemen liefert die Wahrscheinlichkeitstheorie in ihren Lehrsätzen über Summenbildung aus Verteilungen (oder über die Ergebnisse wiederholter Versuche) eine brauchbare Grundlage für die Untersuchungen, wie sie erstmals erfolgreich von Lexis angestellt worden sind. Im zweiten Problemkreis hat man es hauptsächlich mit den Hilfsmitteln der Kollektivmaßlehre zu tun, die von Charlier selbst durch Einführung der »zweiten Gattung« von Verteilungskurven in nützlicher Weise bereichert worden sind. Auch die Korrelationsmethode findet eine verständliche Darstellung im Rahmen der oben angegebenen Grenzen, die der Verfasser sich für das ganze Buch gestellt hat.

Im Einzelnen wäre viel zu sagen über merkwürdige Auffassungen oder Ausdrucksweisen, die einer logischen Kritik nicht standhalten können. Beispielsweise spricht das 6. Kapitel von »Poissons und Lexis' Theoremen«. Worin bestehen diese Theoreme? Der Leser muß aus dem Buch entnehmen, das Poissonsche Theorem sei im wesentlichen die Aussage, daß die Streuung einer Beobachtungsreihe, die auf veränderlichen Grundwahrscheinlichkeiten innerhalb der Einzelserien beruht, kleiner ist als die Streuung einer Reihe mit konstanter Grundwahrscheinlichkeit. Es ist eine große Willkür, aus den Poissonschen Untersuchungen über wiederholte Versuche mit veränderlichen Wahrscheinlichkeiten gerade diesen einen Satz, der weder bei Poisson noch im Rahmen der mathematischen Statistik eine besonders große Rolle

spielt, als das Poissonsche Theorem herauszugreifen. Ganz unzulässig aber erscheint es, einen analog gebildeten Satz als »Lexissches Theorem« hinzustellen, den Satz nämlich, daß die Streuung einer Beobachtungsreihe, bei der die Grundwahrscheinlichkeiten innerhalb einer Serie zwar konstant sind, von Serie zu Serie aber schwanken, immer größer ist, als die Streuung der konstanten Reihe. Das was man Lexis verdankt, ist die Methode der Prüfung einer Beobachtungreihe durch den Vergleich ihrer Streuung mit der einer theoretischen Verteilung, aber nicht eine bestimmte Aussage über den Ausfall dieses Vergleichs. Der Verfasser stellt übrigens dem Lexisschen Verfahren durch Einführung seines »Störungskoeffizienten« ein anderes gegenüber, über dessen Berechtigung man angesichts des Mangels jeder mathematischen Begründung kein Urteil fällen kann. Die Ueberlegungen des zweiten Abschnitts stützt der Verfasser wie allgemein üblich auf die Annahme, daß die Schwankungen einer heterograden Beobachtungsreihe durch Zusammenwirken sehr vieler Einzelursachen (Elementarfehler) zustandekommen. Diese Annahme, die bekanntlich zu der sogenannten »Gaußschen Verteilungskurve« führt, ist ja auch die tiefere Grundlage der Gaußschen Fehlertheorie. Es ist merkwürdig, daß der Verfasser, trotzdem er den gekennzeichneten Standpunkt einnimmt, sich in der abfälligsten Weise über die Bedeutung der Gaußschen Fehlertheorie äußert. Gauß hat keineswegs behauptet, das jede statistische Reihe, wie etwa die Reihe der Sterblichkeitszahlen, dem Exponentialgesetz genügen müsse. Dagegen haben alle neueren mathematischen Untersuchungen tatsächlich gezeigt, daß eine Verteilung, die auf Summenbildung aus sehr vielen Elementarverteilungen zurückgeht, unter ganz allgemeinen Voraussetzungen zu dem Gaußschen Gesetz führt. Es ist nicht gerechtfertigt, sich auf den Standpunkt zu stellen, als würde die Kollektivmaßlehre, die beliebig gegebene Beobachtungsreihen analytisch zu erfassen sucht, einen Widerspruch gegen die Gaußsche Thorie darstellen.

Schließlich noch eine kurze Bemerkung über die vom Verfasser gewählten Ausdrücke und Bezeichnungen. Wenn er gelegentlich andeutet, daß er dem im Deutschen üblichen Wort »Streuung« das Wort »Dispersion« vorziehe, weil es international verständlicher sei, so kann man dem noch einigermaßen zustimmen, wenn man auch in einem deutschen Buch deutsche Ausdrücke lieber sehen würde. Aber schärfste Verwahrung muß man z. B. dagegen einlegen, daß die übliche Bezeichnung »Reihe« als gemeinsames Wort für »Zeile« oder »Spalte« ersetzt wird durch das englische »Array«; auch sonst wäre es wohl angemessen statt »Kolumne« »Spalte«, statt »Frequenz« »Häufigkeit«, statt »Medium« »Mittel« zu sagen und wenig verständliche Neubildungen wie »heterograd« und dergl. zu vermeiden.

Mises.

NACHRICHTEN

Ferdinand Wittenbauer †. In der Geschichte der Wissenschaften und der Gelehrten sind jene Persönlichkeiten besonders auffallend, die außer ihrem Spezialfach noch auf einem zweiten, von jenem oft weit abseits liegenden Gebiet Leistungen vollbringen, die zur allgemeinen Anerkennung gelangen; solche Persönlichkeiten besitzen dann meist für das kulturelle Leben ihrer Wirkungsstätte besondere Bedeutung . Die Rätsel, die mit dem Wesen schöpferischer Arbeit verknüpft sind, werden bei derartiger Zwei- oder Mehrteilung noch wunderbarer und ihre Bedingungen noch schwieriger zu durchschauen.

Bei dem Forscher, dessen Gedächtnis diese Zeilen gewidmet sind, dem Ingenieur und Mathematiker Ferdinand Wittenbauer, war es die Dichtkunst, die seines Wesens zweite Seite ausmachte. Seinem Berufe nach akademischer Lehrer, Professor der Mechanik an der deutschen Technischen Hochschule in Graz — daneben ein Dichter, Nachfahre der Romantiker, in seiner Lyrik voll zarter, traumhafter Stimmungen, manchmal auch von übermütigem Humor erfüllt, in den späteren dramatischen Versuchen sich Problemen des akademischen Lebens und des Ingenieurberufes zuwendend, dem er mit allen Fasern zugetan, und dessen Ansehen er immerdar zu festigen und zu heben bestrebt war. Sein Dichterberuf äußerte sich — über seine poetischen Werke hinaus — in der vorbildlichen Art, mit der er sich der Sprache in Wort und Schrift bediente und keiner seiner zahlreichen Zuhörer, die sich in seiner mehr als vier Jahrzehnte umspannenden Lehrtätigkeit um ihn geschart, wird seine formvollendeten Vorträge vergessen.

Ferdinand Wittenbauer wurde am 18. Februar 1857 in der deutschen, heute zu Südslawien gehörigen Stadt Marburg a. d. Drau geboren, studierte an den Technischen Hochschulen in Graz und Wien, später an der Universität Berlin, wo er Schüler von Kirchhoff und Weierstraß wurde, dann in Freiburg i. Br. Nach Rückkehr in die Heimat habilitierte er sich 1880 als Privatdozent an der Technischen Hochschule in Graz, der er, trotz mehrfacher Berufungen an andere Hochschulen, Zeit seines Lebens treu blieb. 1887 wurde er zum außerordentlichen, 1891 zum ordentlichen Professor der allgemeinen und technischen Mechanik daselbst ernannt. Im Jahre der 100jährigen Gründungsfeier dieser Hochschule, 1911, bekleidete er das Amt des Rektors und dabei trat seine eigenartige Persönlichkeit als gefeierter akademischer Lehrer und Forscher wie auch als Dichter in seinen

sprachlich vollendeten und mit dichterischen Eingebungen reich geschmückten Reden wie vielleicht nie vorher oder nachher ans Licht des Tages. Im Jahre 1917 verlieh ihm die deutsche Technische Hochschule in Prag auf Grund seiner Verdienste um die Wissenschaft und den Unterricht in der Mechanik die Würde eines Ehrendoktors der technischen Wissenschaften.

Seine wissenschaftlichen Arbeiten liegen fast ausschließlich auf dem Gebiete der Kinematik und Dynamik starrer Körper. Ihre stattliche Reihe beginnt mit der Anwendung des damals in der Geometrie zur Geltung gelangenden Gesichtspunktes, statt des Punktes andere »Raumelemente« der Betrachtung zugrunde zu legen, auf die Kinematik. Nach den Erfolgen der damaligen Zeit auf dem Gebiete der Geometrie war es naturgemäß, den Strahl und die Ebene als solche Raumelemente anzunehmen, und die von ihnen unter Annahme gewisser Gesetze erzeugten Gebilde zu studieren. Schon frühzeitig wandte sich W. den Untersuchungen über den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand von kinematischen Ketten und Getrieben zu, die ihn Zeit seines Lebens beschäftigten und die er im Laufe der Jahre zu einer »dynamischen Theorie der Getriebe« ausbaute. Eine Reihe von Arbeiten betrifft die Verwertung der charakteristischen »Pole« (Geschwindigkeits-, Beschleunigungs-, Wende- und Tangentialpol) für die relative Bewegung mehrerer verbundener Systeme gegeneinander, auf die es in der Getriebelehre ankommt. Als Hilfsmittel der Rechnung wird dabei der seither sonst nahezu vergessene und für die in Rede stehenden Probleme sehr geeignete »Baryzentrische Kalkül« von A. F. Möbius verwendet. Bei der Weiterführung dieser Arbeiten hat sich freilich diese ursprüngliche Betrachtungsweise als zu umständlich erwiesen und wurde von W. selbst durch Ausgestaltung der ursprünglich wohl von O. Mohr benutzten Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne ersetzt, die eine weit einfachere und übersichtlichere Darstellung des Bewegungszustandes gestatten. Diese Methode hatte auch den Vorteil, die daran anschließende Bestimmung der Gelenkdrucke und Spannungen in den einzelnen Getriebeteilen zu ermöglichen, und führte W. zu den »dynamischen Kraftplänen« als Gegenstück zu den in der Statik verwendeten. Außer diesen Arbeiten, die sich auf den augenblicklichen Zustand beziehen, beschäftigte sich W. auch mit der endlichen stationären (oder besser: quasistationären) Bewegung des Getriebes und die daraus hervorgewachsene »graphische Dynamik der Getriebe« ist als seine bedeutungsvollste Leistung anzusehen. Sie beruht auf dem Gedanken, daß die Bewegung von Systemen mit einem Freiheitsgrad, zu denen die zwangläufig bewegten Getriebe gehören, durch die Bewegung eines Punktes mit »veränderlicher Masse« dargestellt werden kann, die alle Massen des Getriebes in sich vereinigt und an der alle Kräfte auf Grund der Forderung der Arbeitsgleichheit reduziert werden. Wichtig ist dabei, daß für die Bewegung eines solchen Punktes das Prinzip der lebendigen Kraft bestehen bleibt, welches zeichnerisch verwertet werden kann und W. zur ersten dynamischen Behandlung und Lösung des »Schwungradproblems« geführt hat. Diese Methode, die später von v. Mises u. a. noch ergänzt wurde, geht wesentlich über die vor W. benutzten Verfahren hinaus, die vor allem an den Namen Radinger anknüpfen. In mehreren Aufsätzen in verschiedenen Zeitschriften bis in die jüngste Zeit hat W. die Bedeutung seiner Methoden für mannigfache praktisch wichtige Fälle auseinandergesetzt und die Vorteile der graphischen Methoden in der Kinematik und Dynamik ans Licht zu rücken gesucht. Seit vielen Jahren war er damit beschäftigt, seine Methoden und Ergebnisse in einem großen »Lehrbuch der graphischen Dynamik« zusammenfassend darzustellen, dessen Druck er anfänglich noch überwachen konnte, dessen Erscheinen aber sein rastlos tätiger Schöpfer nicht mehr erleben sollte; die Fertigstellung des Druckes wird von dem Unterzeichneten besorgt und dürfte in wenigen Wochen beendet sein (Verlag J. Springer in Berlin).

Neben diesen umfangreichen Arbeiten kommen einigen kleineren Noten über einzelne Fragen der Elastizitäts- und Festigkeitslehre und der Hydrodynamik eine vergleichsweise geringere Bedeutung zu.

Wenn in den vorstehenden Zeilen versucht wurde, den Inhalt der Originalarbeiten W.s kurz zu kennzeichnen, so muß nunmehr noch auf eine andere Schöpfung auf seinem Fachgebiete hingewiesen werden die für den Mechanik-Unterricht an den deutschen Technischen Hochschulen anerkannte Bedeutung besitzt: seine Aufgaben aus der technischen Mechanik, die aus kleinen, für seine unmittelbaren Zuhörer bestimmten Autographien hervorgingen und allmählich zu dem heute bereits in mehreren Auflagen vorliegenden dreibändigen Werke anwuchsen. Alle, die Mechanik lehren und lernen, wissen, daß es mit der Wiedergabe allgemeiner Sätze und Regeln nicht getan ist, und daß es vielfacher Uebung bedarf, um diese Sätze auf neue Fälle anzuwenden, die uns die Natur und Technik in unendlicher Fülle darbieten. Insbesondere in den englischen Colleges wurde diese Unterrichtsmethode angewendet, und man kann fast sagen, bis zum Drill getrieben, das Verständnis der allgemeinen Sätze durch Beispiele aller Art zu fördern und zu vertiefen. Doch fehlte es in der Literatur an einem Werk, das diesen Gesichtspunkt für die Probleme der technischen Mechanik zur Ausführung gebracht hätte und diese Lücke füllte das Wittenbauersche Werk in weitem Umfange aus. Es bringt eine Fülle von Beispielen in mannigfachen Formen, an denen man so recht das alte Leibnizsche Wort bewahrheitet findet, daß die Natur zwar einfach in ihren Prinzipien, aber unermeßlich reich in ihren Anwendungen ist. Heute dürfen wir uns freilich nicht verhehlen, daß

diese Aufgabensammlung teilweise schon wieder als veraltet bezeichnet werden muß, und daß sie einer gründlichen Neubearbeitung bedarf, um sie in technischer Beziehung den Anforderungen der Gegenwart anzupassen.

Wenn wir zum Schlusse noch ein Wort über die Persönlichkeit Wittenbauers anfügen dürfen, so müssen wir seine Charaktereigenschaften hervorheben, die ihn als Deutschen unserm Volke besonders wert machen müssen: sein mannhaftes, unbeugsames Eintreten für seine nationale Ueberzeugung und sein bis in die letzte Lebenszeit bekundetes und auch durch die schwersten Schläge nicht erschüttertes Vertrauen in die sittliche Kraft unseres Volkes.

Prag, im August 1922.

Th. Pöschl. 202

Tagung in Leipzig September 1922. Auf der diesjährigen Naturforscher-Versammlung in Leipzig werden den Beschlüssen des Vorjahres entsprechend Vorträge aus dem Gebiete der angewandten Mathematik und Mechanik in zwei Gruppen abgehalten. Die einen, mehr physikalischer Richtung, finden in der Abteilung 3 (Technische Physik) am Dienstag, den 19. September 3 Uhr nachmittags statt. Die zweite Gruppe von Vorträgen, mehr mathematischer Richtung, wird in zwei Sitzungen der Abteilung 1 (Mathematik) Donnerstag, den 21. September vormittags 9 Uhr und nachmittags 3 Uhr abgehalten werden. Das genaue Verzeichnis der bisher angemeldeten Vorträge, sowie das allgemeine Programm der Naturforscher-Versammlung, das gewiß auch Interesse erwecken wird, ist an anderer Stelle dieses Heftes veröffentlicht.

Am Donnerstag, den 21. September 5 Uhr nachmittags findet eine Besprechung der Vertreter der angewandten Mathematik und Mechanik statt, die der Beschlußfassung über die Schaffung eines dauernden Zusammenschlusses dienen soll. Recht zahlreiche Teilnahme von Seiten der Fachkollegen wäre sehr erwünscht.

Hydro-aerodynamische Konferenz Innsbruck 1922. In der Zeit vom 10. bis 13. September ds. Js. findet in Innsbruck eine von v. Kármán-Aachen, Levi-Civita-Rom, Oseen-Upsala, Prandtl-Göttingen einberufene Zusammenkunft von Vertretern der Hydromechanik und Aerodynamik statt, zu der Einladungen an die Fachleute verschiedener Länder ergangen sind. Bisher sind folgende Vorträge angemeldet:

A. G. v. Baumhauer-Amsterdam: Beitrag zur Frage des Schraubenfliegers.

U. U. Cisotti-Mailand: Ueber die italienischen Arbeiten zur klassischen Hydromechanik in den letzten fünfzehn Jahren.

G. A. Crocco-Rom: Gegenstand wird später bekannt gegeben.

V. W. Ekmann-Lund: Ueber Meeresströmungen.

L. Hopf-Aachen: Neuere Untersuchungen zur Dynamik der Bewegung von Flugzeugen.

Th. v. Kármán-Aachen: Ueber die sog. Oberflächenreibung bewegter Flüssigkeiten.

T. Levi-Civita-Rom: Ueber die Transportgeschwindigkeit der stationären Wellenbewegung.

C. W. Oseen-Upsala: Die analytische Theorie der Bewegungsgleichungen in einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit.

M. Panetti-Turin: Neue Untersuchungen aus dem aeronautischen Laboratorium der Königlichen Technischen Hochschule in Turin.

L. Prandtl-Göttingen: Die Entstehung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie.

D. Thoma-München: Neuere Beiträge zur Theorie der Turbinen.

E. Trefftz-Dresden: Ueber Tragflügeltheorie.

C. Wieselsberger-Göttingen: Experimentelle Bestätigungen der Tragflügeltheorie.

Nähere Auskünfte erteilt Prof. v. Kármán-Aachen, Aerodynamisches Institut der Technischen Hochschule. 210

Neue Erfolge im Segelflug. Im Anschluß an den Bericht von Dr. Hoff im letzten Heft [1]) wird die Mitteilung von Interesse sein, daß bei dem soeben abgehaltenen dritten Segelflug-Wettbewerb in der Rhön neue Erfolge erzielt worden sind, die alles von den Fachleuten Erwartete übertroffen haben. Es gelang Herrn Hentzen-Hannover ein Segelflug von 3 Stunden 10 Minuten Dauer auf einem Flugzeug der Akademischen Gruppe Hannover. Im Fernflug wurde eine Entfernung von 10 km überschritten. Schließlich hat der bekannte Flieger und Flugzeugkonstrukteur, Herr Fokker, Segelflüge mit Begleiter ausgeführt. Es besteht kein Zweifel darüber, daß diese Fortschritte nutzbringende Verwertung für den Bau und für die Lenkung von Motor-Flugzeugen in großem Umfange gestatten werden, ganz abgesehen von dem hohen theoretischen Interesse, das sie erwecken müssen. 210

Arbeitsausschuß für graphische Rechenmethoden. Innerhalb des Ausschusses für wirtschaftliche Fertigung (AWF) beim Reichskuratorium für Wirtschaftlichkeit in Industrie und Handwerk (RKW) ist in der Sitzung vom 13. Juni ds. Js. ein ständiger Arbeitsausschuß für graphisches Rechnen geschaffen worden. Dieser Ausschuß hat den Zweck, alle Bestrebungen, welche auf Herstellung graphischer Rechentafeln und ähnlicher Hilfsmittel für den praktischen Rechner gerichtet sind, zusammenzufassen. Den Vorsitz führt Herr Oberingenieur Schäfer. Die Zeitschrift, die der Weiterbildung der zeichnerischen Rechenverfahren große Aufmerksamkeit widmet, wird über die sachliche Tätigkeit des Ausschusses fortlaufend berichten. 210

[1]) Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 207 bis 218.

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

Vektorbezeichnung. Zum Entwurf des AEF über Vektorbezeichnungen [1]) möchte ich folgendes bemerken:

Die Bezeichnungen der Vektorrechnung müssen so gewählt werden, daß sie nach Möglichkeit bestehen bleiben auch bei Rechnung mit Dyadensummen, Triadensummen usw. Die jetzt in der Relativitätstheorie benutzte Bezeichnung der geometrischen Größen durch Bestimmungszahlen mit verschiedenen Indizes ermöglicht eine einheitliche Schreibweise auch für Tensoren höherer Stufe in einem n-dimensionalen nichteuklidischen Raum. Diese allgemeine „Tensorrechnung" ist eine Rechnung mit Bestimmungszahlen und deren Invarianten, aber nicht mit den geometrischen Größen selbst. Sie ist geeignet für die Darstellung allgemeiner Formeln und deren Umformungen, nicht aber für direkte Ausrechnung gegebener Probleme. Eine direkte Rechnung mit Polyadensummen in einem n-dimensionalen nichteuklidischen Raum hat Schouten entwickelt [2]). Man wird aber, in der für praktische Zwecke gebrauchten Vektorrechnung, auf die Allgemeinheit verzichten müssen und für die dreidimensionale Vektorrechnung einen besonderen Algorithmus benutzen, für die vierdimensionale Vektorrechnung einen anderen usw.

Immerhin ist es sehr wichtig, für die Vektorrechnung solche Bezeichnungen zu benutzen, daß sie zugleich auch für die Affinorrechnung passen.

Mir scheint es entschieden besser zu sein, nach dem Vorschlag des AEF für das skalare Produkt zweier Vektoren kein Multiplikationszeichen zu benutzen und die dyadische Multiplikation durch einen Punkt anzudeuten. Die skalare Multiplikation ist eine viel engere Verknüpfung als die dyadische; es ist ratsam, dieses auch in den Bezeichnungen auszudrücken. In den Ausdrücken $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{v}$ erscheint der gerichtete Teil des Produktes, der Vektor $\mathfrak{v}$, von dem skalaren Teil abgesondert. Triaden werden dann durch kompliziertere Ausdrücke dargestellt, z. B. $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$, das hängt aber damit zusammen, daß eine Triade tatsächlich eine kompliziertere Größe ist, als eine Zahl $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$.

Man wendet dagegen ein, daß dann auch ein gewöhnlicher Skalar von einem Vektor durch einen Punkt getrennt werden sollte. Man müßte also stets $\varphi\cdot\mathfrak{v}$ statt $\varphi\,\mathfrak{v}$ schreiben. Nun ist aber jeder Skalar auch als isotroper Tensor (mit gleichen Achsen) aufzufassen. Bezeichnet man den Einheitstensor (Grundtensor) mit $I = \mathfrak{i}_1\cdot\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2\cdot\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{i}_3\cdot\mathfrak{i}_3$, so kann man den Skalar φ durch den isotropen Tensor φI ersetzen und, folglich, auch schreiben $\varphi I\,\mathfrak{v}$ statt $\varphi\,\mathfrak{v}$ oder $\varphi\cdot\mathfrak{v}$. So kann man schreiben

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,I \equiv \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\,\underline{\mathfrak{C}} + \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}\,\underline{\mathfrak{A}} + \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}$$

und folglich

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,I\,\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}.$$

Selbstverständlich wird der Einheitstensor nicht geschrieben, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist. Es ist also folgerichtig, daß die Ableitungen $\nabla\varphi$, $\nabla\Phi$ Vektoren sind und die Ableitung $\nabla\mathfrak{v}$ ein Skalar ist: in allen drei Fällen ist die Stufe der geometrischen Größe um eine Einheit erniedrigt worden; aus dem isotropen Tensor oder aus einem allgemeinen Affinor erhält man einen Vektor, aus dem Vektor erhält man einen Skalar. Die dyadischen Ableitungen, dagen, erhöhen die Stufe der differentierten Größe: Aus $\varphi = \varphi I$ und Φ erhält man Triadensummen $\nabla\cdot\varphi I = \nabla\varphi\cdot I$ und $\nabla\cdot\Phi$, aus dem Vektor $\mathfrak{v}$ erhält man den Nablaaffinor $\nabla\cdot\mathfrak{v}$.

Ein anderer Einwand gegen die Benutzung des Punktes als Zeichen der dyadischen Multiplikation wird so begründet: Es seien zwei Dyaden $\Phi = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ und $\Psi = \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{D}$. Das skalare Produkt dieser Dyaden (erste Ueberschiebung nach Schouten) ist

$$\Phi\,\Psi = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{D}$$

der erste Skalar dieser Produktdyade, d. h. die „zweite Ueberschiebung" der Dyaden $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{D}$ ist durch einen ziemlich komplizierten Ausdruck gegeben,

$$S_1(\Phi\,\Psi) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\cdot\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}.$$

Nun könnte man z. B. diese zweite Ueberschiebung so andeuten, daß man schriebe

$$S_1(\Phi\,\Psi) = \Phi\quad\Psi$$

oder, nach dem Vorschlag von Schouten,

$$S_1(\Phi\,\Psi) \equiv \Phi^2\cdot\Psi,$$

wobei man ruhig die erste Ueberschiebung durch $\Phi\,\Psi$ bezeichnen kann. Diese Festsetzung liegt aber vollständig im Gebiet der Affinorrechnung und braucht nicht in einem Entwurf für Vektorbezeichnungen näher berücksichtigt zu werden.

Die vom AEF vorgeschlagene Bezeichnung erlaubt auch ohne weiteres, Potenzen von

---

[1]) Diese Zeitschr. 1, 1921, S. 421—422; vergl. auch die Zuschriften 2, 1922, S. 161—164 und 227—231.

[2]) Diese Rechnung ist z. B. angewendet in dem Buch von Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, das demnächst bei J. Springer in Berlin erscheint.

Affinoren hinzuschreiben, z. B. $\Phi\,\Phi = \Phi^2$, $\Phi\,\Phi\,\Phi = \Phi^3$ usw. Die durch dyadische Multiplikation von Affinoren entstehenden Tetraden $\Phi \cdot \Phi$ oder Hexaden $\Phi \cdot \Phi \cdot \Phi$ kommen sehr selten vor; sie können daher auch etwas komplizierter aussehen. Potenzensummen von Affinoren werden dagegen oft gebraucht. Setzt man z. B. $\Lambda' = \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{s} - \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{t}$, so bedeutet die Summe $e^{\Lambda'\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda'^n \varphi^n}{n!}$ einen Versor, d. h. einen Affinor, der eine Drehung in der $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}$-Ebene für jeden mit ihm multiplizierten Vektor bewirkt. Setzt man $\Lambda = \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{s} + \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{t}$, so bedeutet die Summe $e^{\Lambda\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda^n \psi^n}{n!}$ einen hyperbolischen Versor, d. h. einen Affinor, der die Lorentztransformation bewirkt[1]). Bei Benutzung des Punktes, als Zeichen der skalaren Multiplikation, wären diese Ausdrücke bedeutend komplizierter. Der Vorschlag des AEF, für die Darstellung des skalaren Produktes kein besonderes Multiplikationszeichen zu benutzen, scheint mir am vorteilhaftesten zu sein.

Die Benutzung eines Multiplikationszeichens für die vektorielle Multiplikation scheint mir am wenigsten vorteilhaft zu sein. Viel übersichtlicher ist die Darstellung der Vektorprodukte durch Zellenausdrücke mit Hilfe eckiger Klammern. Aber auch diese, vom AEF vorgeschlagene und in Deutschland wohl am meisten gebrauchte Schreibweise, scheint mir nicht die beste zu sein. Jedes Vektorprodukt aus den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kann auch dargestellt werden als skalares Produkt eines der Vektoren mit der „Ergänzung“ des anderen. Budde hat für solche Ergänzungen („antimetrische Tensoren“) die Bezeichnung [$\mathfrak{B}$ oder $\underline{\mathfrak{B}}$] eingeführt[2]). Ich habe[3]) für einen solchen Affinor den Namen Axiator und die Bezeichnung $\underline{\mathfrak{B}}$ vorgeschlagen. Schouten bezeichnet die „Ergänzung“ mit ${}_2\mathfrak{B}$. Die Vorteile dieser Bezeichnung treten am deutlichsten hervor, wenn man die Darstellung komplizierter Produkte mit verschiedenen Bezeichnungen vergleicht. Es sei z. B. das skalare Produkt aus dem Doppelvektorprodukt $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{C}}$ und dem Vektor $\underline{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{n}$ zu bilden. Dann erhält man, unter Berücksichtigung der möglichen Assoziationsänderungen, folgende Tabelle:

Mit Unterklammerung	Mit dem $\times$-Zeichen	Mit eckigen Klammern
1. $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{C}}\,\underline{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{n}$	$\{(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{C}\}\,(\mathfrak{m} \times \mathfrak{n})$	$[[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{C}]\,[\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}]$
2. „	$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\,\{\mathfrak{C} \times (\mathfrak{m} \times \mathfrak{n})\}$	$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}\,[\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}]]$
3. „	$\mathfrak{A}\,\{\mathfrak{B} \times (\mathfrak{C} \times (\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}))\}$	$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}\,[\mathfrak{C}\,[\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}]]]$
4. $\underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{D}$	$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D})$	$[[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]]$

Die Ausdrücke 1., 2., 3. stellen dieselbe Zahl dar. Bei Benutzung der Axiatoren ist die zulässige Assoziationsänderung der Faktoren durch die Schreibweise von selbst angedeutet, dagegen ist es mit der Schreibweise der zweiten und der dritten Kolonne zunächst gar nicht einleuchtend, daß die Ausdrücke 1., 2., 3. identisch sind. Die Benutzung des Axiators für die Darstellung der Vektorprodukte ist für den Ausdruck 4. etwas umständlich, weil hier zwei Klammern untereinander stehen müssen. Vielleicht kann man den Axiator auf eine andere, bequemere Art bezeichnen; jedenfalls ist es außerordentlich wichtig, daß man auf diese Weise die Produkte ganz ohne Klammern darstellen kann.

Besonders groß sind die Vorteile dieser Darstellung für die Rechnung mit dem Nablaoperator ∇. Es ist eine natürliche Forderung, daß der symbolische Vektor ∇ nicht über Klammern hinweg wirken soll, daß vielmehr sein Wirkungsbereich durch Klammern abgegrenzt werden kann. So erhält man z. B. die Formeln

$$\nabla\,\underline{\mathfrak{u}}\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{v} = (\nabla\,\underline{\mathfrak{u}})\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{v} - \mathfrak{u}\,\underline{\nabla}\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{v} = \operatorname{rot}\mathfrak{u}\,\operatorname{rot}\mathfrak{v} - \mathfrak{u}\,\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v},$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = (\nabla \cdot \mathfrak{A})\,\mathfrak{B} + (\nabla \cdot \mathfrak{B})\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\nabla \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{B}\nabla \cdot \mathfrak{A} + \underline{\mathfrak{A}}\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{B} + \underline{\mathfrak{B}}\,\underline{\nabla}\,\mathfrak{A},$$

usw.

Zusammenfassend, schlage ich zum Entwurf des AEF folgende Zusätze vor:

Zu Punkt 6. Das Vektorprodukt zweier Vektoren kann auch dadurch bezeichnet werden, daß man einen der beiden nebeneinander geschriebenen Faktoren unterklammert $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}$, oder durch eine andere Bezeichnung als Axiator kenntlich macht. Der unterklammerte Vektor kann von beiden Seiten skalar mit anderen Vektoren multipliziert werden, $\mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,\underline{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{C}$.

Zu Punkt 8. Bei Benutzung des unterklammerten Vektors müssen die Differentialausdrücke so aufgefaßt werden, daß der symbolische Vektor ∇ nicht über Klammern hinweg wirkt.

Lichterfelde, den 15. Juli 1922.

Jean Spielrein. 199

[1]) Vergl. Spielrein »Zur vektoriellen Darstellung der Lorentztransformation«, Arch. f. El. 1922.

[2]) Budde, Tensoren und Dyaden, Braunschweig 1914.

[3]) Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, Stuttgart 1916.

(Redaktionsschluß 31. August 1922.)

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.